※配布者限り

有限要素法とともに歩んだ半世紀

東京大学名誉教授　川井忠彦

(1) 私がアメリカ留学(1954/9～1957/6)で学んだこと

私は 1952 年春東大工学部船舶工学科を卒業、同大学院に進学 1954 年 9 月から 1957 年 6 月まで恩師吉識雅夫先生のお世話で米国ペンシルベニア州ベスレヘム市にあるリーハイ大学(Lehigh University, Bethlehem,Pa,U.S.A.)土木工学科大学院に留学、同大学で展開されていた塑性解析及び設計(Plastic Analysis &Design)を修得して帰国した。今日では塑性論の進歩と有限要素法を中心とする計算力学の発展により、構造解析に革命が起きたのは周知のとおりであるが、実際の構造設計において、その最終強度を詳細に検討することは当時は未だスーパーコンピューターが存在していなかったので不可能であったし、今日でも経済的に引き合わないので、特別な場合を除いて非弾性大変形解析は行われていない。すなわちスーパーコンピューターによる大規模計算を行わずに構造物の最終強度を推定する構造解析及び設計法の開発が構造技術者の長年の夢であった。1940 年に Van den Broek による極限解析及び設計(limit analysis & design)の考え方が提案され、この方法の理論的基礎が Brown 大学の Prager や Drucker のグループによって確立された。この新しい“塑性解析及び設計法”の開発研究は間もなく世界中の構造工学及び設計技術者、研究者の注目を浴びることになった。そして Lehigh 大学土木工学科では骨組構造の塑性解析及び設計法の実用化研究をアメリカ鉄鋼協会(AISC)のスポンサーで大々的に進められていった。私はこの骨組構造の極限解析及び設計手法・開発研究の一翼を担う仕事に従事することになった。しかし、この研究は平面骨組構造の極限解析に関する限り、静荷重問題に関しては一定の成果が揚げられたが動的崩壊解析法の開発研究は進まず、又、一般の板殻構造や土質岩盤コンクリート構造の極限解析設計法の研究は漸くその第一歩をどう踏み出すべきか検討されてきたが、実質的な研究開発は、NASTRAN,MARC 等の汎用有限要素解析ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑの出現以前は殆ど皆無に等しくこの手法への土木建築関係の技術者の関心は急速にしぼんでいってしまった。併し私は極限解析の思想に魅せられその思想の具体化の道を考え続けた。
そして、固体は載荷の極限において、いくつかの剛体ブロックからなるリンク機構を形成し，剛体運動を起こして不安定になってゆくという実験事実に着目して“剛体ばね”モデル(Rigid Bodies Spring Model 略して RBSM)と自称する離散化モデルを 1976 年に提案した。この要素モデルの結合バネ系に適当な構成則を導入し、非線形有限要素法でよく用いられる“増分法”(incremental method)に従って解析してゆくとあらゆる固体や構造物の崩壊過程のシミュレーションが的確に行えることを知ったのである。
そして、この方法は今日更に変位 u_i と応力 σ_{ij} を未知量とする混合要素モデル(mixed element model)に一般化され、60 年前に提案された極限解析及び設計法は固体力学に限らず流れ、熱移動や物質移動、更に電磁界の極限解析も可能性が見えてきた。その研究の概要を簡潔に説明するのが本講演の主題である。

※配布者限り

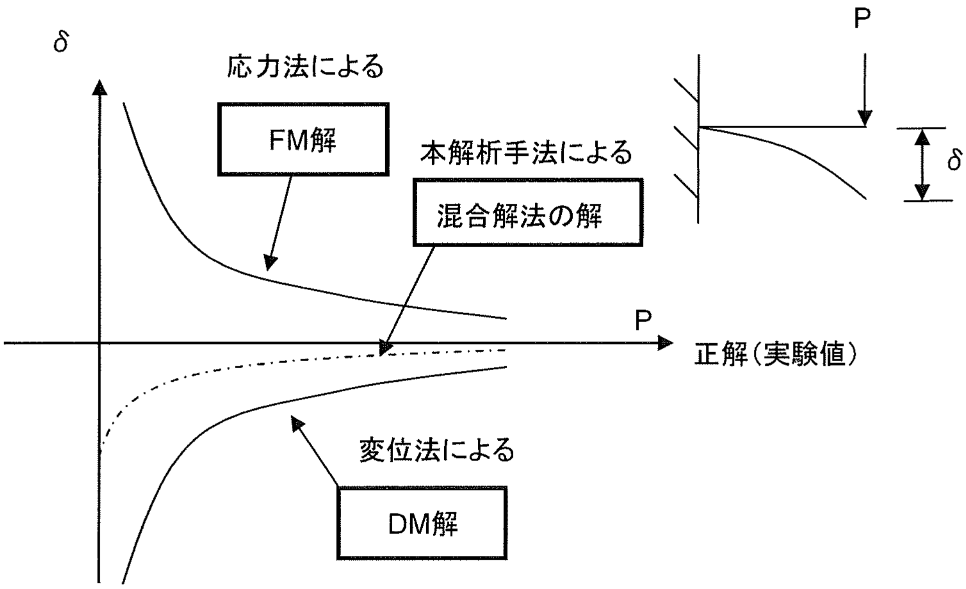
(2)NASTRANの開発についての私見

1969年アメリカはAppolo11号の月面着陸を成功させソビエト連邦に宇宙開発で勝利した。この成功の蔭の立役者はNASAが莫大な予算とマンパゥアーを投入して開発した汎用プログラム"NASTRAN"であると私は思う。

NASTRANはMacNeal-Schwendler社が固体力学非線形問題解析プログラムを開発したMARC社を吸収合併し、世界最大、最高峰の汎用科学技術計算プログラムの開発会社となり、所謂"CAD-CAM-CAE-CIM"時代のリーダーになったのである。

しかし、私個人としてNASTRANの開発は初期の線形解析に留めておくべきであったと考える。

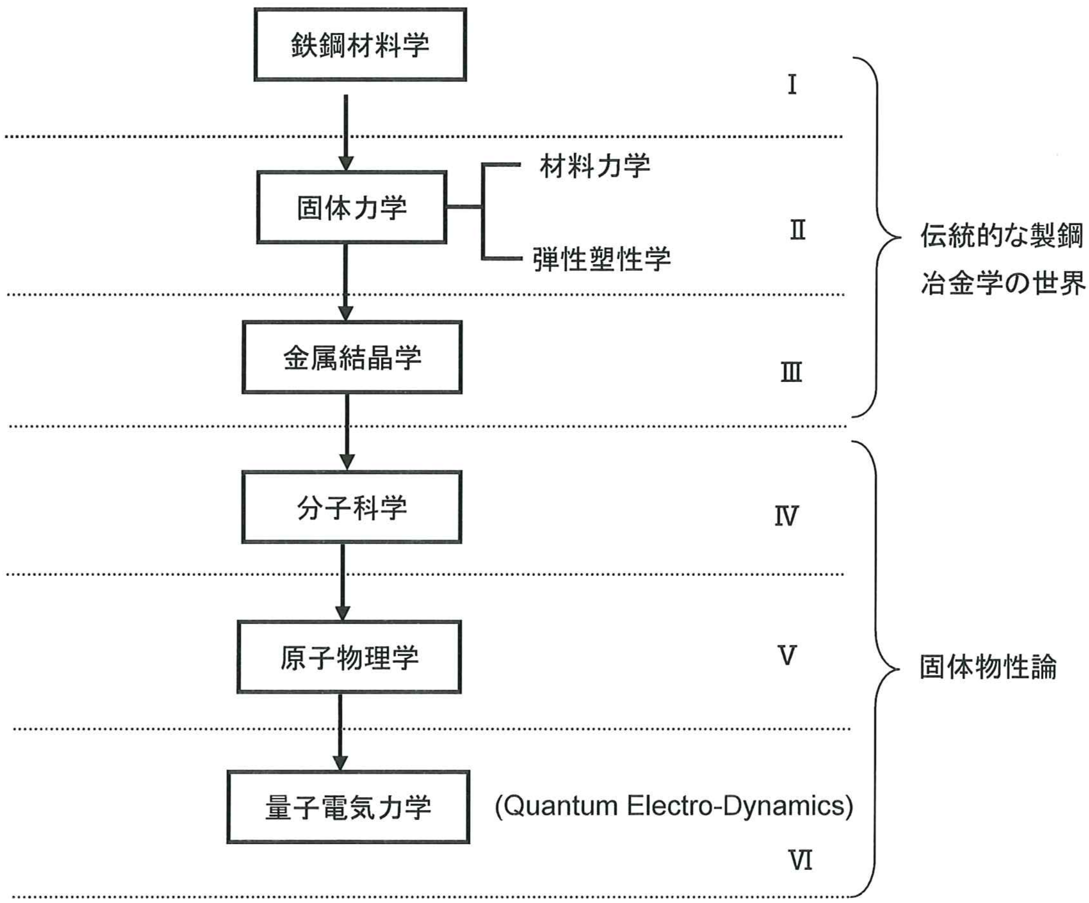
その理由はNASTRANの拠り所としている解法は"変位法"(Displacement Method)であって理論的にはこの手法だけでは微小変形問題に対する正解の上界(upper bound)しか求められないのである。換言すればこの方法だけで構造物を設計した場合、非安全側の強度予測(実際よりも強度を高く見積る設計)しか出来ないことになってしまうからである。



NASTRANはその開発の経緯が物語るごとく、ライバルの応力法(Force Method)と主導権争いの末FMを蹴落として開発された変位法のプログラムである。その成果はAppolo11号の月面着陸という歴史的偉業によって充分立証されたのは事実であるが、その後に続いて起こった2度にわたる空中爆発の大惨事は月ロケットの安全性、信頼性は未だ限りなく100%あるとはいえないことを明白に物語っている。(勿論、これらの二大惨事の原因が全てNASTRANだけに頼った宇宙船構造設計の欠陥とは思わないが)

私は有限要素法の将来性を信じ我国での研究開発普及教育に半世紀に渡って努力して来た人間であるがNASTRANの開発は*線形解析の段階で留めておくべきであった*。即ち、非線形解析汎用プログラムまで展開したのは時機尚早であったと考える。併し一方

では、高速大容量電子計算機システム出現に刺激されてFEMは僅か半世紀の間に宇宙開発だけでなく先端技術の殆どの分野に驚異的な進歩発展をもたらし、今日見られる様なCAD/CAM/CAE/CIMの産業形態が作られていったのも事実である。
然しながら、“物造り”の世界はどんなにFA化が進んでもそれが正しく展開されているかどうかを見守り最適化を計るのは技術者、本人であることは明らかである。今日我国で起きている基幹産業界の“空洞化”の現象は余りにも爆発的に急成長を遂げた複雑で高価なFEM技術の将来に警鐘を乱打しているのである。
自然界は本質的に“玉葱”の様な構造になっており、その本質を理解するには外側の皮から一枚一枚剥がして行く以外方法はないのである。
この事を鉄鋼材料について云うならばその材料強度を論ずるにはその階層構造について一層づつ研究開発を積み重ね最終的に量子電気力学(QED)に到達する気の遠くなる様な*研究の積み重ね*が絶対に必要であると私は思っている。



※配布者限り

例えば"製鉄業"を含めた物造りの世界では先ず固体力学と金属結晶学の間の第一の領域でいかに良質の鋼材を経済的に量産するかとういう点に的を絞って研究開発そして生産管理運営するというのが、製鉄事業者本来の使命と思うがどうであろうか？

(3) *統一エネルギー原理開発の経緯*

私は 2002 年夏ウィーンで開催された第５回世界計算力学会議（WCCMV）において E.Reissner が 1950 年に提案して混合変分原理は解析対象の状態ベクトル $s(u_i, \sigma_{ij})$の停留解(stationary solution)を与えるが極値解(extremum solution)は与えないことを発見した。正確にはそのエネルギー曲面は鞍型安定曲面(saddle shaped surface)である。

そこで私は Reissner の原理を離れ、力学の根本原理であるエネルギー保存則から直接極値解(extremum solution)を求める混合変分原理を導出し、"統一エネルギー原理"と命名した。この原理は 1744 年フランスのモーペルテュイ(Maupertuis)が発表した"*最小作用の原理*"にも深く関連することが判った。(彼はその成立の条件を完全には云い表せなかったが）この原理は固体のみならず流体力学、電磁気学、熱移動、物質移動現象等(transport phenomena)を支配する非平衡熱力学の根本原理になり得るものと思われる。

ここでは固体力学を中心に私の統一エネルギー原理開発研究のあらましを紹介する。

※配布者限り

連続体力学の数学的基礎

藤野勉

離散系と連続体

自然界に存在する種々の現象を観察、分析し、その間に存在する法則を抽出することは学術、技術の発展のため不可欠である。このとき現象を科学的に把握し、その体系化を行うためには、数理的な考察が必要である。この目的に沿う数学としては、代数学と微分方程式論が代表的である。これらはそれぞれ離散系ならびに連続体の解析に適している。

離散系とはそれを構成する単位の数が有限個の系で、各単位は番号 i=1~I によって識別され、その状態は状態変数 u_i によって表される。換言すれば多次元空間 u_i を想定するとき、系の一つの状態は、この空間中の一つの点またはベクトルによって代表され、それを取り扱う数学は代数学である。これに対し連続体ではそれを形成する単位は無限個の点である。したがって、これらの番号によって識別せんとする試みは不可能で、これに代わるものとして座標 $x = (x_1; x_2; x_3)$ が用いられ、その状態は座標を独立変数とする関数 u(x)によって表される。

このような理由により、連続体の挙動を取り扱う数学としては微分方程式論が適している。

離散系、連続体にかかわらず、状態には時間的に固定された静的状態と変動する動的状態がある。静的・動的状態ともに、その変更には必ずその原因となる何らかの作用の存在が必要である。

このように状態を結果、作用を原因とみなすときこれら１組の量を互いに共役な量であると定義する。１組の共役な量は互いに独立ではなく、一定の関係によって結ばれており、これら共役量の内積は物理的に意味をもつ不変量をつくる。

連続体の場合には、表１に示したように仮想仕事的、エネルギー的表現の二つの立場があり、これらは Green の積分公式によって結ばれている。このように連続体力学とは、これら二つの量のかかわりあう関係を論ずる学問であると解釈できる。＊

表１　共役量の関係

現象＼表現	仮想仕事的	エネルギー的
力学	変位，力	ひずみ，応力
熱	温度，熱量	温度傾斜，熱流束
電気	電圧，電荷	電場，電束密度

＊有限要素法ハンドブック２応用編（培風館）第９章第２節

※配布者限り

複合物理学(Multiphysics)の諸問題

東大名誉教授　　川井忠彦

(1)複合物理学とは

我々を取り巻く自然界においては、絶えず運動量、物質、エネルギーを始めとする種々の物理量の移動、変換が行われ、静止することはあり得ない。人類はこの状態を***移動現象（transport phenomena）***と呼び、それを積極的に利用して今日見られるような種々の産業、すなわち化学工業、金属工業、火力、水力、原子力発電や核融合、ソーラー発電などを興してきたのである。また人間を含めて、生物体の中でもこの移動変換が非常に巧妙な機構によって行われ、生命の営みがなされている。

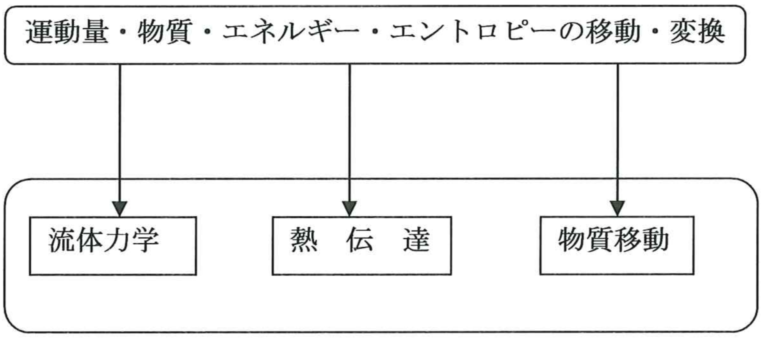


図 1.　移動現象論の体系

このように考えてくると、従来の工学系においてはこの問題をまずマクロに捉えて、固体力学、流体力学、伝熱工学、電磁気学、材料科学などによって個別に取り扱われてきたが、バイオテクノロジー、ナノテクノロジーの最近の発展はこれらの問題を**複合物理学（multiphysics）**、**あるいは粒状体物理(cluster physics)**と命名して、現象全体を統一的に扱おうという立場が明確になってきた。(図 1.参照)
一般に移動変換現象においては、運動量（並進運動量と角運動量）、エネルギーは常に保存され、エントロピー（entropy）増大の大原則を満足させなければならない。一方、これらの物理量の流れる割合(flux)とその原動力となる一般化力（generalized forces）との間には構成則（constitutive law）、又は***現象論的関係式（phenomenological equation）***と呼ばれる***実験式***の導入が必要であり、これら二つの法則を組合せることにより、次の様な数学的定式化が可能となる（図２．参照）

※配布者限り

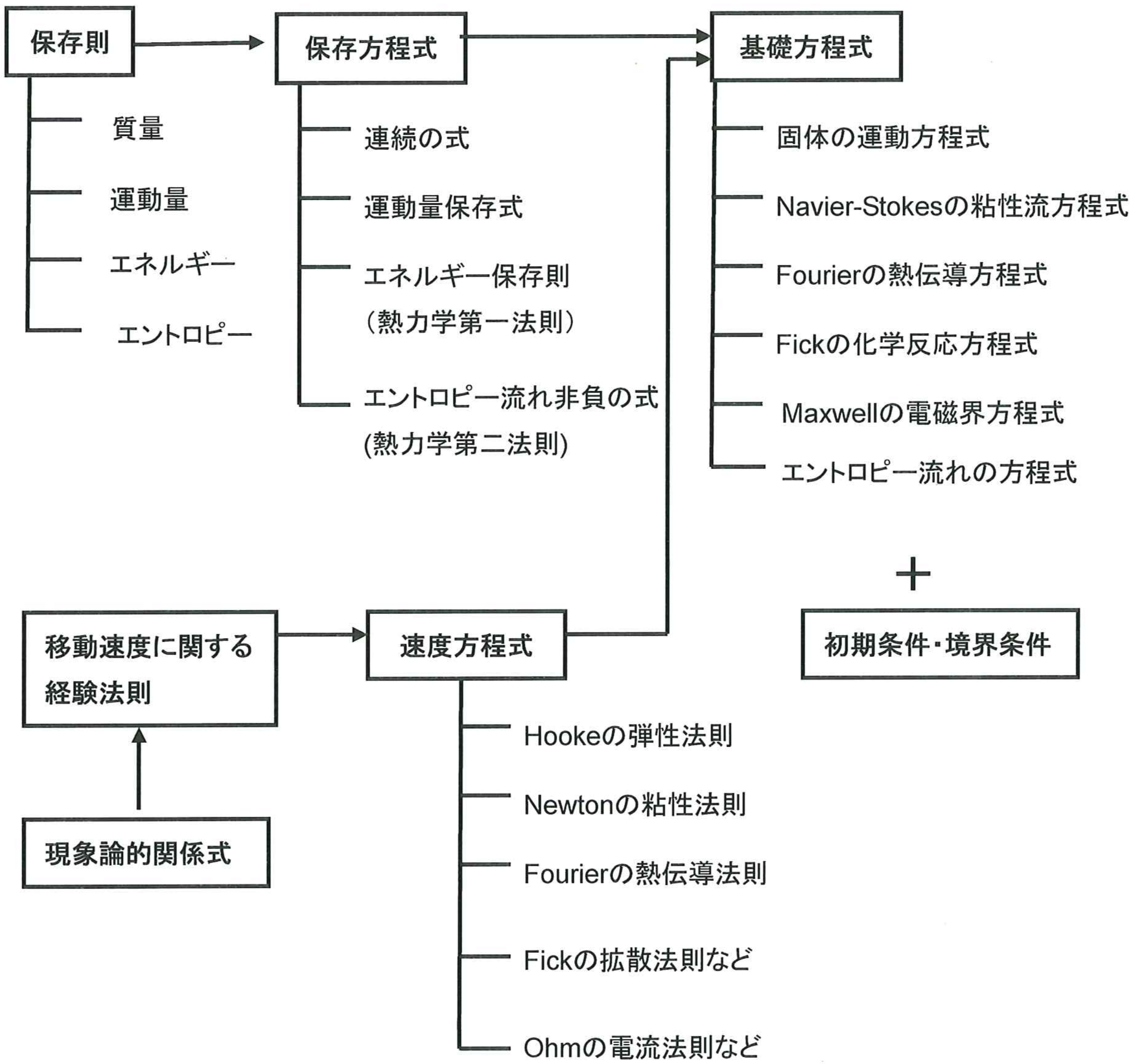


図２．*移動現象の数学的定式化*

※配布者限り

2．問題の定式化

あらゆる複合物理学の問題の解は次の５種類の物理量保存則を満足しなければならない。

- (ⅰ)質量保存則
- (ⅱ)並進運動量保存則
- (ⅲ)角運動量（回転運動量）保存則
- (ⅳ)エネルギー保存則（熱力学第一法則）
- (ⅴ)エントロピー増大則（熱力学第二法則）**Prigogine, Onsager** の非平衡熱力学

(ⅰ)の質量保存則はそれ以下の 4 法則の中に組み込まれており、(ⅱ)の並進運動量保存則は **Newton** の運動法則 $f=m\alpha$（αは加速度)で(ⅳ)及び(ⅴ)の法則の中に **D'Alembert** の原理により慣性力(inertia force)として組み込まれている。

(ⅲ)の角運動量保存則は剪断応力の対称性 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ が成立するとして電磁力の絡む連成場の問題を除いて、連続体力学（continuum mechanics）の世界では暗に仮定して理論を構築するのが普通である。

従って、複合物理学の諸問題とはエネルギー保存則とエントロピー流非負の法則が成り立つ様に物質の状態ベクトル(u_i , σ_{ij} ,T ,・・・)を決定する問題と云うことが出来る。

これまでは物体を連続体と見做し、荷重を受けて変形する物体の状態ベクトル(u_i, σ_{ij})の変化を追求してきたと云うことができる。

非平衡熱力学諸問題の離散化極限解析

そこで温度の影響（熱伝導、熱伝達、輻射等)、物質移動(化学反応)の影響を考慮した固体力学問題は(V)のエントロピー流非負の条件下で(iv)のエネルギー保存則を満足する様問題を解くことに帰着する。

エネルギー流動方向の拘束条件

無論考える問題が全て非定常であるから時間増分法に従った解析を実施しなければならないことは云うまでもないことである。その時クリープや粘弾性の様な問題をどの様に考えるべきかは時間の関係でこの講演では採り上げないことにする。

※配布者限り

統一エネルギー原理導出のプロセス

σ_{ij}

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$t_i = \sigma_{ij} n_j$
$on S_\sigma$

$\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

u_i

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV$$

Gauss の発散定理

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \int_S t_i u_i dS - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV$$

固体力学境界値問題

$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \;\; in V$

$u_i = \bar{u}_j \quad on S_u$

$t_i = \bar{t}_i \quad on\, S_\sigma$

$S = S_u + S_\sigma$

ここで、$t_i = \sigma_{ij}\, n_j$ で n_j は S_σ 上に立てた単位外向き法線を表わす。

エネルギー保存則

for true u_i and σ_{ij}

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \int_V \bar{p}_i u_i dV + \int_{S\sigma} \bar{t}_i u_i dS + \int_{Su} \bar{u}_i t_i dS$$

$$\delta \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \left(\int_V \bar{p}_i \delta u_i dV + \int_{S\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{Su} \bar{u}_i \delta t_i dS \right) = 0$$
$(w.r.t.\;\; u_i \;\&\; \sigma_{ij})$

統一エネルギー原理の導出

連続体力学における統一エネルギー原理の開発

Nov.2.2005

川井忠彦

連続体力学における統一エネルギー原理の開発は当然非平衡熱力学の立場に立ち、時間増分形で表現されなければならない。その研究は固体力学において展開された統一エネルギー原理を速度形で書き表わされたものとの対比が出発点である。

	固体力学	連続体力学
物理量保存則	エネルギー保存則 $\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \int_V \bar{p}_i u_i dV$ $+ \int_{S_\sigma} t_i u_i dS + \int_{S_u} \bar{u}_i t_i dS$ (w.r.t. u_i & σ_{ij}) ここに $S=S_\sigma+S_u$, $u_i = \bar{u}_i$ on S_u $t_i = \bar{t}_i$, $t_i = \sigma_{ij} n_j$ on S_σ	エントロピー保存則 $\frac{D_i S}{Dt} = \sum_k J_k X_k \geq 0$ $\int_V J_k X_k dV = \int_V \bar{Q}_k J_k dV + \int_{S_R} \bar{R}_k J_k dS$ $+ \int_{S_J} \bar{J}_k R_k dS$ J_k:k 番目の流束 $S=S_R+S_J$ $R_k=X_kN_k$ X_k: J_k に対応する一般化力
構成方程式	応力−歪関係式 微小変形弾性論の範囲内では $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}$ $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} > 0$	現象論的関係式(phenomenological relation) $J_k = L_{kl} X_l$ $\frac{D_i S}{Dt} = \sum_l \sum_k L_{kl} X_l X_k > 0$ *Onsager の原理*
統一エネルギー原理	*エネルギーの最小化* $\delta \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV - \int_V \bar{p}_i \delta u_i dV$ $- \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta t_i dS = 0$ (w.r.t. u_i & σ_{ij}) *平衡熱力学方程式*	*エントロピーの非負化* $\sum_k [\delta \int_V J_k X_k dV - \int_V \bar{Q}_k \delta J_k dV$ $- \int_{S_R} \bar{R}_k \delta J_k dS - \int_{S_J} \bar{J}_k \delta R_k dS \ ] \geq 0$ (w.r.t. J_i & X_k) *非平衡熱力学方程式*

“NASTRAN”開発の経緯

川井忠彦

NASTRAN は先ず線形解析プログラム開発の段階で Boeing 社を主体とする変位法(Displacement Method)によるプログラム開発を目指す開発チームと Duglass 社を中心とする応力法(Force Method)によるプログラム開発チームを作り、その線形プログラム開発を競争させる方式で開発を進めていった。

ところが、応力法プログラム開発はその理論的基礎に不静定力導入の一般的理論が確立出来ず、線形解析プログラムの段階で変位法グループに遅れをとるという結末になった。そしてこれにより応力法の開発は有限要素法の世界から姿を消す結果になってしまったのである。

“ASKA”の開発

但し、歴史的に見ると NASTRAN の開発計画がアメリカで実行される以前に英国ロンドン大学の J.H.Argyris 教授が NASTRAN 開発計画に先んじて”ASKA”と名乗る応力法の汎用プログラムの開発を進め、その後西独のスゥッツガルト工科大学にその研究開発拠点を移し、米国で Nastran の開発される以前に非線形解析まで可能と称する汎用構造解析プログラム”ASKA”を開発、アメリカの NASTRAN（線形解析）プログラムの開発よりずっと以前に世界に公表した。我が国では伊藤忠電子計算センター（後の“センチュリーリサーチセンター”）が初めて導入した。しかし、プログラムの信頼性がやや完全ではなかった様で NASTRAN が世界的に使用され、その実績による信頼性、汎用性が明らかになるに従って ASKA の世界的評価は急速に落ち、またリーダーの死によって消滅してしまった。

この様な歴史的経過を背景にアメリカは Boeing 社を中心に開発された”NASTRAN”（線形解析専用プログラム）が公開され、即ち全世界の大学研究所、産業界に普及することになった。そして、その最大の成果は 1969 年 Appolo11 号の月面着陸の成功によって線形解析専用”NASTRAN”の実用性信頼性は全世界に実証されたのである。しかしながら、電子計算機の大型化、高速化が驚異的速度で進み、NASTRAN 開発は、CAD.CAM.CAE 化がアメリカを中心とする世界的潮流となり、NASTRAN はその非線形解析プログラムの開発まで遂行して世界一の<u>変位法汎用プログラム</u>開発国となった。

しかし、NASTRAN は変位法(DM)のプログラムであり、如何に金力と人力をつぎ込んで開発してもその解析結果は“変位法”であるが故に真の解の上界(upper bound)しか得られないのである。即ち、同時にその下界解(lower bound solution)を求められなければ計算結果の信頼性の保証は得られないのである。

換言すればNASTRANの様な非線形有限要素解析プログラムの開発には私の開発した混合法(mixed method)理論に従って上、下界挟み込み解析を行わなければ絶対に理論的精度の保証は得られない筈である。

即ち、NASTRAN は変位法のプログラムであるから線形解析プログラムの開発段階で止めておくべきであった。一般に固体力学だけでなく流体力学、熱移動、物質移動、電磁気学、

そして、プラズマ物理学を含む粒状体物理学(cluster physics)諸問題の解析はこの論文で紹介した統一エネルギー原理を J.W.Gibbs の平衡熱力学、或いは Prigogine の非平衡熱力学に従い理論武装を一歩一歩確実に開発を進めて行けば21世紀の中心課題であるナノテクノロジーやバイオテクノロジーの新分野開拓の道も開かれてゆくものと確信している。

非線形解析汎用プログラムの開発を目指すならば私が展開した混合法の汎用プログラムの開発が唯一成功の道である。

ことを述べてこの講演の結びと致します。
長時間に亘る私の講演の御清聴頂きまして有難う御座いました。

21 世紀　科学技術計算の進むべき道

2010 年 5 月 13 日

川井忠彦

バイオ、ナノの世紀の科学技術の推進力

(1) 伝統的な理論物理及び数学的方法
（理学的方法）　　　　　　R.P.Feynman の方法

(2) 計算力学的解析法　　　　（RBCSM による混合 FEM）
（工学的方法）　　　　　　離散化極限解析法＋統一エネルギー原理

(3) 新非線形科学的方法　　　（蔵平由紀ほか有志）
によるカオス、フラクタル、ネットワーク理論等身近なところによる非線形現象とその新しい解析法の開発

(i)　いづれにしても拠り所は一つ、統一エネルギー原理である。
（エネルギー及びエントロピー保存則及びその最小原理）

(ii)　統一エネルギー原理に基づいた RBCSM（混合要素）を用いる増分離散化極限解析法はその基礎を Maupertuis の原理と起源を一している方法で理工学への応用からバイオ、ナノテクノロジー分野への入り口まで到達していると考える。

(iii)　この統一エネルギー原理は理学、工学はもとより、生命科学、人文科学、情報科学等の分野にも通用する極値原理と考えることも可能であり、近い将来目覚ましい未踏科学技術分野への応用が期待できるものと思われる。(IBM のマクナマラが開発した Planning, Programing, Budgeting System やレーガン大統領がカリフォルニア州知事時代に挑戦したカリフォルニア　プロジェクト etc)

(APPENDIX)

鷲津久一郎先生は固体及び連続体力学の変分原理に関し、"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"を Pergamon Press から出版された。
先生は固体及び連続体力学の基礎変分原理の研究をライフワークとして進められた世界的学者である。特にこの本は有限要素法の開発初期アメリカの研究技術者の座右の書となった。先生は弾性学及び塑性学の変分原理に関し、独自の研究を展開されたが、ここでは Hill の塑性理論に基づいて展開された塑性力学の変分原理を紹介する。

(II) Prandtl−Reussの流れ理論に基づく歪増分塑性論に対する統一エネルギー原理

鷲津久一郎著"塑性論"(岩波講座 現代応用数学B7 pp.17~25より抜粋)

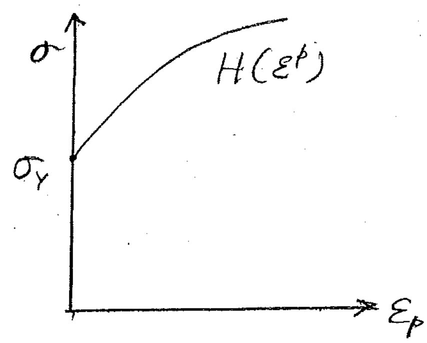
(α) 加工硬化材料に対するPrandtl−Reussの方程式

材料の単軸引張り試験より得られる応力ー塑性歪曲線
(岸田敬三著：材料の力学(培風館) pp.161~169)

$$\sigma = H(\varepsilon^p) \quad \text{----} (\text{II}-1)$$

$$\bar{\sigma} = H\left(\int d\bar{\varepsilon}_p\right) \quad (\text{II}-2)$$

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon^p}{\sigma} \quad (\text{II}-3)$$



応力ー塑性歪曲線

$H' = \dfrac{d\sigma}{d\bar{\varepsilon}_p}$ とすると $d\lambda = \dfrac{3}{2}\dfrac{d\bar{\sigma}}{H'\bar{\sigma}}$ (II-4)

が得られる。(II-4)式を(II-3)式に代入すると

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{H'\bar{\sigma}}\sigma_{ij}' \quad -(\text{II}-5)$$

となる。

歪の弾性成分について(II-5)式に対応する増分式は

$$d\varepsilon_{ij}^{e\prime} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}, \quad d\varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{kk} \qquad \text{---(II-6)}$$

で与えられる。全歪は弾性成分と塑性成分の和

$$d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon^{e\prime}_{ij} + d\varepsilon^{p}_{ij}$$

で与えられるから、材料の塑性域における構成方程式は(II-5)と(II-6)を結合させて

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon'_{ij} &= \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{3\,d\bar\sigma}{2H'\bar\sigma}\sigma'_{ij} \\ d\varepsilon_{kk} &= \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{kk} \end{aligned}\right\} \qquad \text{---(II-7)}$$

となる。上式の第二式は応力の静水圧成分と平均垂直歪(体積変化率)は塑性域においても比例することを表わしている。この式に更に体積歪成分 $\frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\,\delta_{ij}$ を加えて、完全な応力－歪関係式を求めると次式のごとくなる。

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\,\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{3\sigma'_{ij}d\bar\sigma}{2\bar\sigma H'} & d\bar\sigma > 0 \\ d\varepsilon_{ij} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\,\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} & d\bar\sigma < 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(II-8)}$$

(II-8)式を加工硬化材料に対するPrandtl-Reussの方程式と呼んでいる。ここで(II-8)式の逆関係式を求めるために(II-8)式の第一式の両辺に σ'_{ij} を掛けて総和をとると

$$\bar\sigma\left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{H'}\right) d\bar\sigma = \sigma'_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \qquad \text{(II-9)}$$

が得られる。加工硬化材料を扱っているから、$H' > 0$ である。従って $d\bar\sigma \geq 0$ は $\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0$ に対応することが確かめられる。故に(II-8)式を $d\sigma_{ij}$ について解けば

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \frac{E}{1-2\nu} de\,\delta_{ij} + 2G\left[d\varepsilon'_{ij} - \frac{\sigma'_{kl}\, d\varepsilon_{kl}\,\sigma'_{ij}}{\frac{2}{3}\bar\sigma^2\left(\frac{H'}{3G}+1\right)}\right] & \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij} > 0 \\ d\sigma_{ij} &= \frac{E}{1-2\nu} de\,\delta_{ij} + 2G\,d\varepsilon'_{ij} \quad \text{ここに } de = \frac{d\varepsilon_{ii}}{3} & \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij} < 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{--(II-10)}$$

が得られる。

(β) 歪増分塑性論に対する変分原理

対象とする問題は Prandtl-Reuss の方程式に従う材料で次の諸条件を満たす解を求めることである。

平衡条件式：　$d\sigma_{ij,j} = 0$　(II-11)

歪の適合条件式：　$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i}\right)$　(II-12)

応力境界条件式：　$d\sigma_{ij}\nu_j = d\bar{t}_i$ on S_σ　(II-13)

変位境界条件式：　$du_i = d\bar{u}_i$ on S_u　(II-14)

$S = S_\sigma + S_u$

この問題に対して次の3つの変分原理が成立する。

仮想仕事の原理(上界定理)

幾何学的境界条件(II-14)を満たす変位増分の一組をdu_i^*とし、適合条件(II-12)によりdu_i^*から導かれる歪増分を$d\varepsilon_{ij}^*$とするとき

$$\int_V dA^*\,dV - \int_{S_\sigma} d\bar{t}_i\,du_i^*\,dS \qquad (\text{II-15})$$

を最小にするものが正解を与える。ここにdA^*は

$$dA = \frac{3E}{2(1-2\nu)}(de)^2 + G\left[d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij} - \frac{(\sigma'_{kl}\,d\varepsilon_{kl})^2}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\left(\frac{H}{3G}+1\right)}\right] \qquad (\text{II-16})$$

の$d\varepsilon_{ij}$を$d\varepsilon_{ij}^*$で置換したものである。

補仮想仕事の原理(下界定理)

平衡方程式(II-11)と力学的境界条件(II-13)を満足する応力の一組を$d\sigma_{ij}^*$とするとき

$$\int_V dB^* dV - \int_{S_u} dt_i^* d\bar{u}_i dS \qquad (II-17)$$

を最小にするものが正解を与える。ここにdB^*は

$$dB = \frac{3(1-2\nu)}{2E}(d\sigma)^2 + \frac{d\sigma_{ij}' d\sigma_{ij}'}{4G} \qquad (II-18)$$

の$d\sigma_{ij}$を$d\sigma_{ij}^*$で置換したものである。

ここに $e = \frac{1}{3}e_{ii}$, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ である。

統一エネルギー原理

この場合も(II-15)と(II-17)→minimu の変分原理は互に独立である。

従って本問題の全増分塑性論に対する統一エネルギー原理は(II-15)式と(II-17)式で与えられる変分原理を統合して次式のごとく与えられる。

(II-11)式から(II-14)式で与えられる同時の増分状態ベクトルを$(du_i^*, d\sigma_{ij}^*)$とすれば

$$\int_V (dA^* + dB^*) dV - \int_{S_\sigma} d\bar{t}_i du_i^* dS - \int_{S_u} dt_i^* d\bar{u}_i dS$$

の値を最小にするものが正解を与える。

--- (II-19)

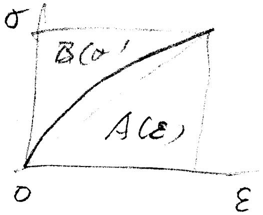
① 考えている固体(もっと一般的には連続体)に対するエネルギーの原理(即ち)仮想仕事の原理及び補仮想仕事の原理の定式化は(片方だけでは)不完全である。

> 何となれば構成則は本質的に実験式である視点に立てば変位u_iと応力σ_{ij}を互に独立変数と考える立場が自然である。

即ち統一エネルギー原理こそ真のエネルギー原理である。その導出法はGaussの発散定理とJ.W. Gibbsの全エネルギー関数の考え方である。

$$A(\varepsilon_{ij}) = \int_C \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}, \quad B(\sigma_{ij}) = \int_C \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij}$$

$$\underline{A(\varepsilon_{ij}) + B(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}}$$



統一エネルギー原理はGaussの発散定理より次のごとく導かれる。

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, dV = \int_V p_i u_i\, dV + \int_{S_\sigma} t_i u_i\, dS + \int_{S_u} \bar{u}_i t_i\, dS \quad \text{--- (a)}$$

$S = S_\sigma + S_u$

S_u: 変位規定境界 $u_i = \bar{u}$ on S_u

S_σ: 応力規定境界 $t = \bar{t}$ on S_σ

$$\int_V (A(\varepsilon_{ij}) + B(\sigma_{ij}))\, dV \rightarrow \quad \therefore \ \Pi_t(u_i, \sigma_{ij}) = \Pi_p(u_i) + \Pi_c(\sigma_{ij})$$

従って Maupertuis の原理が導かれる。

$$\Pi_t(u_i, \sigma_{ij}) \rightarrow \min\ (\text{w.r.t. } u_i, \sigma_{ij})$$

土木学会招待講演"FEMと共に歩んだ半世紀"より 京大名誉教授 川井忠彦 2010年5月18日

② Maupertuisの原理は物理学におけるエネルギー保存則であり、上述の如くGaussの発散定理から導出出来る。

別にエネルギー保存則を満足する解$S(u_i, \sigma_{ij})$は無数にあり、最適設計問題における許容域を形成する。従って最適設計とはその目的関数を定義して(例えば全重量ないしはコスト)その関数の与えられたSの領域内$S(u_i, \sigma_{ij})$での最小化(あるいは最大化、一般には最適化)を計る問題であると定義出来る。

P.L. Maupertuisはこの原理を神学の立場から提起し、その目的関数の最小化が森羅万象の支配原理であると考えた。(1744年)

私の導いた統一エネルギー原理は固体力学の分野に限定して導かれたがこの原理は物理学だけでなく自然科学、人文科学、医学、生物学各人間活動の全般のみならず(人間を含む)宇宙全ての動きを支配する根本原理と考えられる。(知、情、意)

大脳生理学(脳科学) 時実、甘利教授

知 ↓ 自然及び人文科学 (真)

情 ↓ 芸術 (美)

意 ↓ 政治経済外交 → (善)

③ 統一エネルギー原理の導出にあたりfree-freeの条件の完全な必要不可欠である → かくして $\Pi_p(u)$と$\Pi_c(\sigma)$が統一化される。