

V&Vのススメ:土木分野における 数値解析の課題

応用力学委員会

土木分野の数値解析におけるV&Vに関する小委員会

1

土木分野の数値解析におけるV&Vに関する小委員会

- 目的
 - 先行している欧米や日本の他学会の取り組み・成果を参照しつつ、地盤・鋼・コンクリート・流体など土木分野の材料ごとに必要となる数値解析のV&Vの考え方やプロセスをまとめ、解析の信頼性向上を図る。
- 期間
 - 2014年～
- 委員
 - 委員長: 渦岡良介(徳島大学), 副委員長: 櫻井英行(清水建設)
 - 地盤, 鋼, コンクリート, 流体など, 現在18名
- 活動
 - 国内外の関連分野のV&Vの動向調査と分析
 - 各材料分野における数値解析の信頼性の現状調査と分析
 - 各材料分野におけるV&Vの具体的な実施方法の検討

2

研究討論会23(2014年) 数値解析における検証と妥当性の確認 (Verification & Validation)をご存知ですか？

- 堀宗朗(応用力学委員会委員長)
- 越塚誠一先生(東京大学)
 - V&Vの基礎, 計算工学会, 原子力学会, ASME
- 吉村忍先生(東京大学)
 - 機械学会, 認定試験, 海外機関との相互承認
- デイスカッション
- 佐藤靖彦先生(北海道大学)
 - コンクリート分野
- 中井健太郎先生(名古屋大学)
 - 地盤分野
- デイスカッション, 小委員会の今後の活動

土木分野での課題(2014年)

- 多様な非線形材料, 空間的・時間的スケールが大きい・長い構造物の解析にとって, 合理的なV&Vとは？
- モデルV&V
 - 材料挙動の複雑さのため, VerificationとValidationの区別が不明確？
 - Verificationの課題: 解析解がない非線形材料。
 - Validationの課題: 単純化された模型実験vs複雑な現場。解析結果の用途に適した問題設定は可能か？
 - Predictionの課題: **不均一性・不確実性の評価**。解析に必要な調査とのバランスは？
- 品質V&V
 - コード十人の信頼性。
 - 確立されたコードがない分野では, コード毎に検討が必要。
 - V&Vに対応した解析者の力量。認定制度の必要性。

V&Vのススめ: 土木分野における数値解析の課題

- 渦岡良介(徳島大学)(5分)
 - 委員会の活動報告, 研究討論会の進め方
- 櫻井英行(清水建設)(20分)
 - V&Vの重要性
 - ASMEのV&Vガイドラインの要点
- 山田貴博先生(横浜国立大学)(30分)
 - V&Vに関する海外の最新動向
- 本城勇介先生(元岐阜大学)(30分)
 - 地盤における不確実性の取扱いについて
- デイスカッション(35分)
 - 今後の委員会活動など

JCOSSAR2015

(第8回構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム)

- 不確定事象を含むシミュレーションのV&Vをどう行うべきか
 - 日時: 10月15日(木) 14:25-17:30
 - 会場: 日本学術会議 講堂
 - 主旨説明・総合同会
 - 話題提供
 - 吉川暢宏(東京大学・JCOSSAR2015運営委員会委員長)
 - 計算の品質保証に関する日本機械学会および日本計算工学会での活動について, 白鳥正樹(横浜国立大学)
 - 供用適性評価に基づく減肉した機器の強度評価と有限要素解析の活用, 山口篤志(労働安全衛生総合研究所)
 - 土木・地盤工学分野におけるV&Vの現状と課題, 渦岡良介(徳島大学)
 - 地震工学分野のシミュレーションとそのV&V, 堀宗朗(東京大学)
 - 南海トラフ巨大地震に備える減災科学について, 金田義行(名古屋大学)
 - JAXA 航空の空力解析におけるV&Vの現状と新たな取り組み, 松尾裕一(宇宙航空研究開発機構)
 - 船舶流体シミュレーションにおけるV&V, 日野孝則(横浜国立大学)

6

WCCM XII & APCOM VI



Login Sign Up

Welcome to the Congress!

Submission

Call for Mini-Symposium

Verification and Validation in Computational Mechanics for Civil Engineering

Ryosuke Uzuoka, Hideyuki Sakurai, Shuji Moriguchi, Kentaro Nakai

1. Calculation verification of numerical method
2. Validation of numerical method with laboratory tests and physical models
3. Modeling and quantification for inhomogeneity and uncertainties of construction materials such as geomaterials and concrete material, etc.
4. Acceptable agreement between simulation and experiment outcomes

V&V のススメ: 土木分野における数値解析の課題
研究討論会

ASME のV&V ガイドラインの要点

2015年9月16日@岡山大学

清水建設 技術研究所 櫻井英行

なぜ、シミュレーションの品質なのか

伊理: “計算の品質向上を目指して” 日機械学会誌、1995.7.

工業製品についていえば、品質管理がおろそかにされ、品質保証のなされていない製品には市場競争力、国際競争力が無い。製造技術においては品質と信頼性の概念は最も重要なものであり、品質に敏感でない技術は今やないといってよい。

計算技術と製造技術とは同列に論じられない点も多いかもしれないが、現在までの所、計算および計算結果についての品質、信頼性の概念の重要性が関係者の間で一般に広く認識されているとはいえないか。しかし、計算も技術の一つであるとすれば、このような現状は速やかに改善されなければならない。

少々誇張して「**今までの計算は、計算のやりっばなしだ**」と言ったりすることもある。計算者はその手順や結果について他人をきちんと説得し納得させることが出来なければならない。そのような方法論を我々は確立しなければならない。

コンピュータの性能はどんどん向上しており、並列超高速計算技術も現実のものとなりつつある。扱う問題の規模の拡大にこの性能向上のすべてを当ててはならず、**その一部(あるいは全部)を計算の品質の向上にも振り向けたいものである。**

V&Vの二つの流れ

品質V&V (実用的?)

- 顧客への品質保証 (ISO9001)
- 要求事項を満足していることの確認
- 日本計算工学会標準, NAFEMS

モデルV&V (本質的?)

- 実現象に対するモデルの信頼性確立
- 正確度の要件を満足していることの確認
- ASME V&V 10, 20, 30, 40

工学シミュレーションの
品質保証とV&V

QUALITY
ASSURANCE
AND
VERIFICATION &
VALIDATION
OF
ENGINEERING
SIMULATION.

丸善
4,536円

ASME (米・機械学会) のモデルV&V

ASME V&V 10-2006: *Guide for V&V in Computational Solid Mechanics*

ASME V&V 10.1-2012: *An Illustration of the Concepts of V&V in Computational Solid Mechanics*

ASME V&V 10.2 ~ 10.x-Draft: V&V 10の解説書

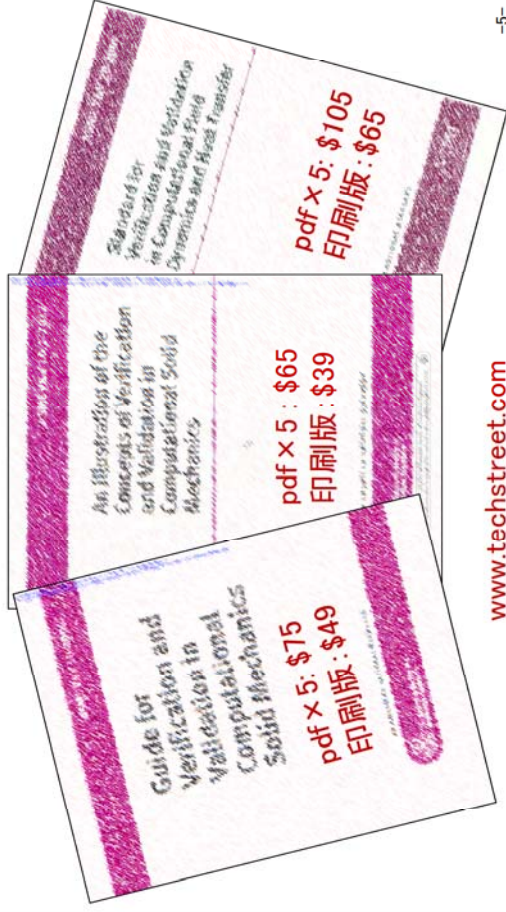
ASME V&V 20-2009: *Standard for V&V in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*

ASME V&V 20.1 ~ 20.2-Draft: V&V 20の補足

ASME V&V 30-Draft: *Standard for V&V of System Analysis and Computational Fluid Dynamics Software for Nuclear Applications*

ASME V&V 40-Draft: *Standard for V&V in Computational Methods for Medical Devices*

ASME V&V



www.techstreet.com

ASME V&V10の考え方

Intended Use

Are we solving the problem right?

モデル化したとおりに、正しく、十分な精度で解析しているか？

モデリング
 ・モデル化(実問題)
 ・検証(Verification)
 ・予測解析
 ・不確かさの評価

実験
 ・実験計画
 ・初期・境界条件
 ・応答値の計測
 ・不確かさの評価

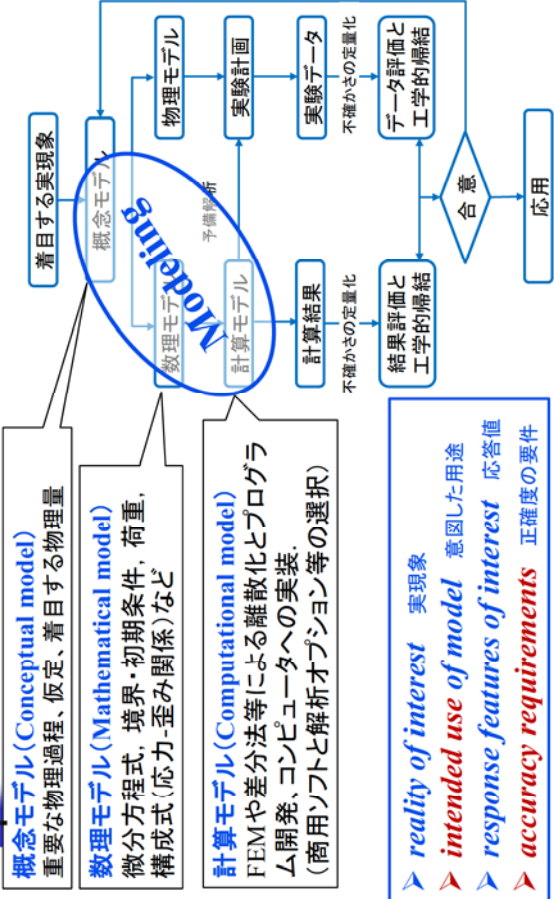
Are we solving the right problem?

検証済の解析結果と実験結果との差異は、所定の要件を満足しているか？

妥当性確認 (Validation)

モデルの適用

Modeling in ASME V&V10



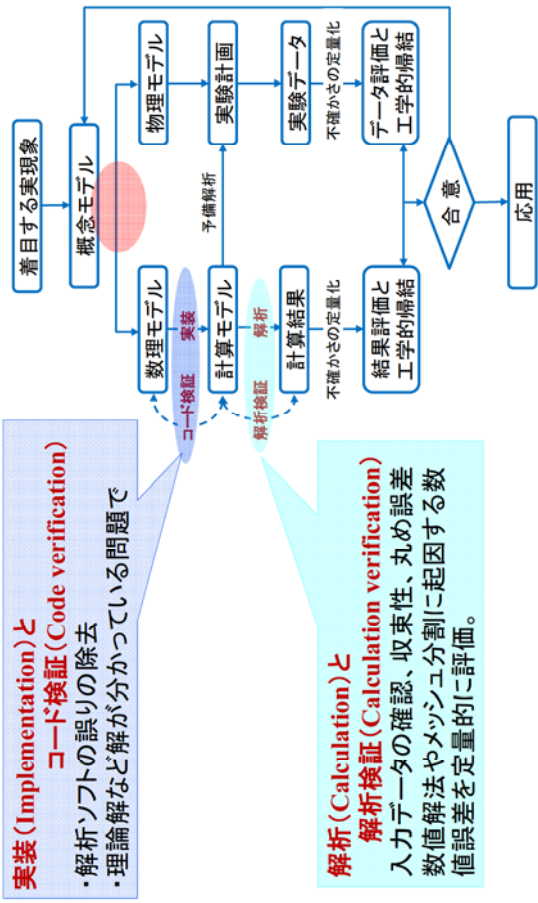
概念モデル(Conceptual model)
 重要な物理過程、仮定、着目する物理量

数理モデル(Mathematical model)
 微分方程式、境界・初期条件、荷重、構成式(応力-歪み関係)など

計算モデル(Computational model)
 FEMや差分法等による離散化とプログラムの開発、コンピュータへの実装、(商用ソフトと解析オプション等の選択)

- *reality of interest* 実現象
- *intended use of model* 意図した用途
- *response features of interest* 応答値
- *accuracy requirements* 正確度の要件

Verification in ASME V&V10

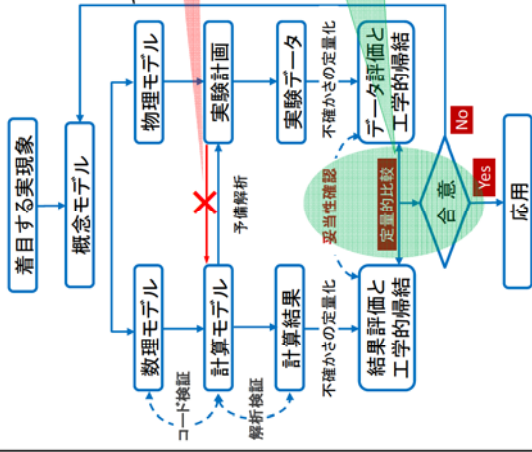


実装 (Implementation) とコード検証 (Code verification)
 ・解析ソフトの誤りの除去
 ・理論解など解が分かっている問題で

解析 (Calculation) と解析検証 (Calculation verification)
 入力データの確認、収束性、丸め誤差、数値解法やメッシュ分割に起因する数値誤差を定量的に評価。

Validation in ASME V&V10

- 1st class revision → 計算 / 数理モデル
 ・パラメタの校正
 2nd class revision → 数理 / 概念モデル
 ・物理、シナリオ、仮定の再考



意識的に、あるいは無意識に実験結果に合わせようとすることを排除するため

妥当性確認 (Validation)
 モデルが実現象を正確に表現しているかをモデルの intended use の観点から評価。

正確度要件 ⇔ How good is good enough ?



日本計算工学会の品質V&V

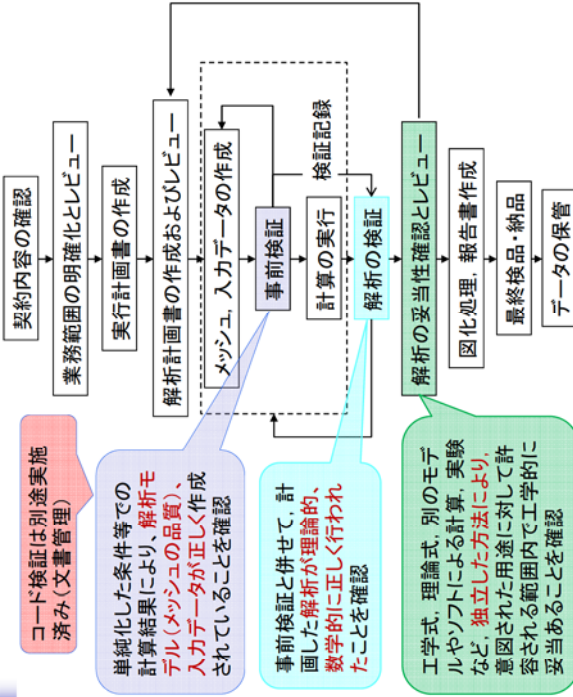
印刷版: 2,500円
 (特別会員) 1,500円

日本計算工学会標準

工学シミュレーションの品質マネジメント
 工学シミュレーションの標準手順
 学会標準 (HQ001&002) 事例集
 pdf: 40,000円
 (特別会員) 20,000円

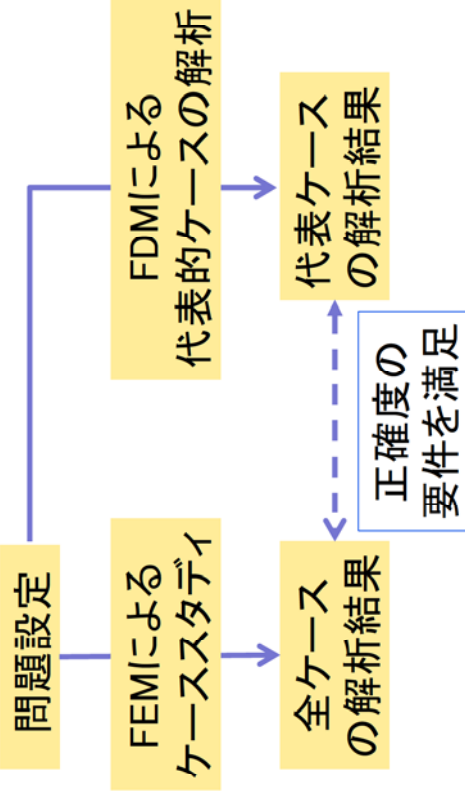
使用許諾番号: HQ001:2014-004 発効日: 2015年2月27日
 ・(社) 日本計算工学会は本書現版を下記団体に無期限に使用許諾します。
 法人名: 清水建設株式会社
 事業所: 技術研究所 殿
 ※改訂版は別に定めた更新料にて都度、導入いただけます。
 ※発効日又は更新日から3年以内は無償で事業所名の変更を承ります。
 ・事業所内に限定した次の使用が許諾されています。
 ①印刷して配布すること ②イントラに掲載すること
 ③所内文書に転載すること ④改変して所内文書として再利用すること
 ※③および④では出版に本書を明記してください。
 ・許諾範囲を逸脱した場合、使用許諾を取り消すことがあります。

日本計算工学会標準 S-HQC002



工学式、理論式、別のモデルやソフトによる計算、実験など、**独立した方法**により、意図された用途に対して許容される範囲内で工学的に妥当であることを確認

Verification or Validation ?

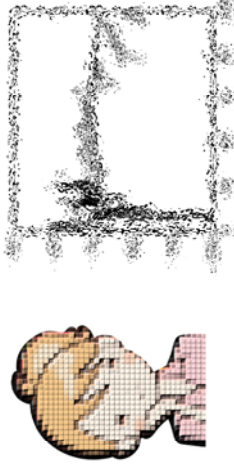


土木分野の数値解析の仮題

モデルV&Vの視点から

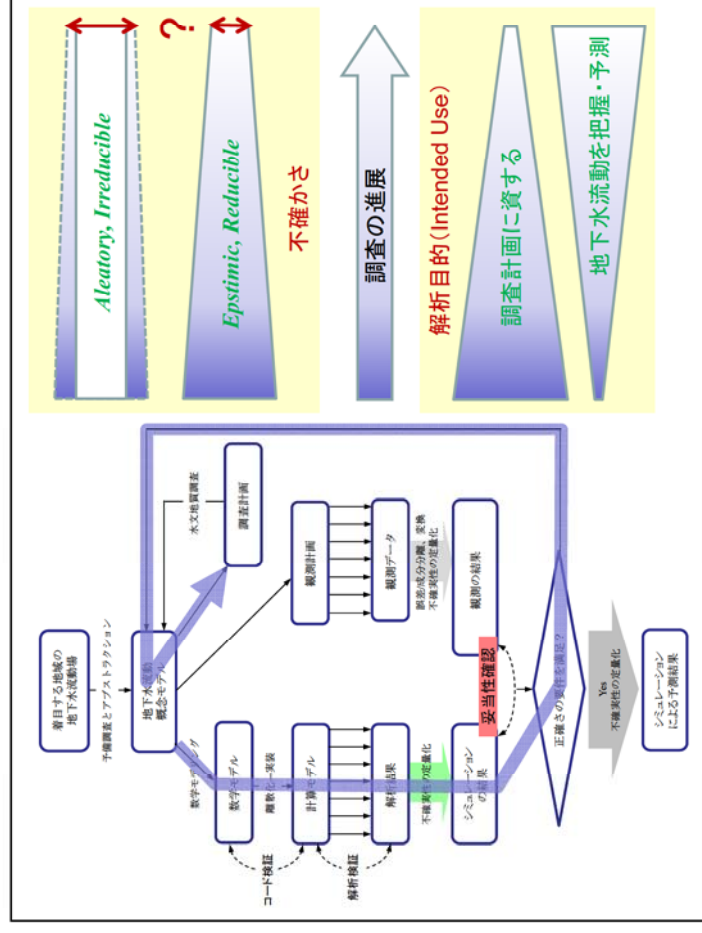
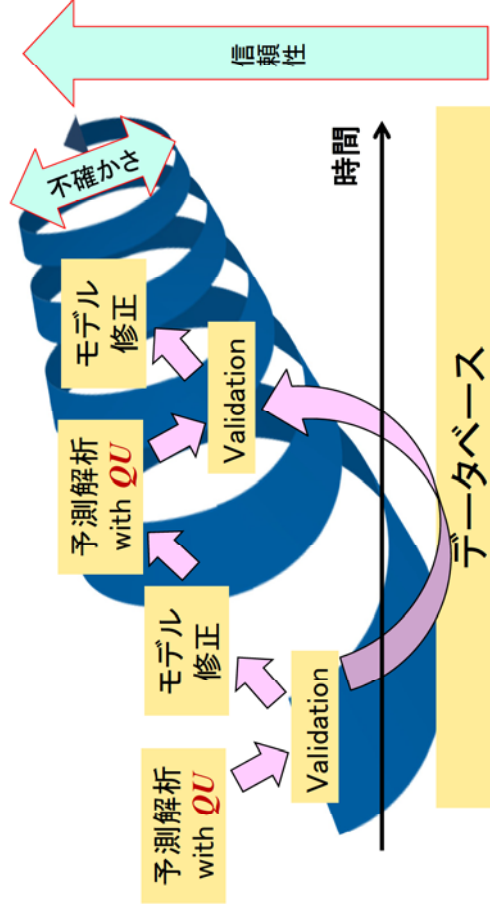
解析検証: 不確かさの定量化(UQ)

Validation: 実験 ← 精確度の要件に基づく対比
: 実構造物 ← 実行 ⇒ 結果のDB化と活用



土木分野の数値解析の仮題

V&V and UQ → Prediction with QU



数値シミュレーションの目的と妥当性

ASME&V symposium等における認識

- 数値シミュレーションの目的
 - 現象解析
 - 合理的意思決定ツール
- 合理的手法: 数値シミュレーション+観測, 実験
 - 多くの因子の分析, 検討
 - コスト削減
 - 信頼性の確保

対象全体の実験等を意味するものではない
- 得られた結果の評価
 - 用いられる結果の与える影響 : リスクの評価
 - 社会的信頼が得られるか : 信頼性の評価(Credibility Assessment)
- 評価の観点
 - 誤差 Error と不確かさ Uncertainty
 - 検証(validation)と妥当性確認(validation)
 - 不確かさの定量化(UQ, Uncertainty Quantification)

キーワード:
credibility
uncertainty

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

2

海外の最近動向

ASMEにおけるV&V,UQのアプローチと
検証手法の新展開

横浜国立大学 大学院環境情報研究院

山田貴博



土木学会全国大会研究討論会

2015/9/16

1

信頼性 reliability と credibility

Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current Englishより

- reliable : that may be relied or depended upon
- rely on(upon) : depend upon with **confidence**
- reliability : state or quality of being reliable
- credible : that can be believed in
- believe in : have **trust** in
- credibility : the ability to be believed in

Internet (<http://www.chacha.com/question/what-is-the-difference-between-trust-and-confidence>)より

Confidence is built by our knowledge and expertise over something.
Trust is the amount of faith we have over someone or something.

Internet (<http://oshiete.goo.ne.jp/qa/2413043.html>)より

confidence: 人・物の『能力』に対する客観的・経験的根拠を持つ信頼 trust: 人・物の『善性』に対する主観的・直感的な信頼

日本語訳は
どちらも信頼性

不確かさと誤差

- 不確かさ Uncertainty
 - 偶然の不確かさ aleatory uncertainty
 - 物理的な変動要因, ばらつき
 - 確率分布で表現
 - 原理的に減らすことは困難
 - 知識の不確かさ epistemic uncertainty
 - 認識された不確かさ Recognized uncertainty
 - モデル化で考慮していない現象
 - データが取得できない
 - 認識できない不確かさ Blind uncertainty
 - ヒューマンエラー
 - 認識の誤り
 - 技術の進歩により減らすことが可能
- 誤差 Error
 - 真値との差 ← 真値が定義できる

不確かさの
定量化
Uncertainty
Quantification

誤差評価
Error
Estimation

W. L. Oberkampf and C. J. Roy: Verification and Validation in Scientific Computing, Cambridge University, 2010

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

3

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

4

妥当性, 信頼性の根拠



- 数値シミュレーション=モデル化に基づく計算
 - モデルを含む計算結果が不確かさを含む実験結果と一致 ≠ 正しい
 - モデルの表現能力, 不確かさ
 - 実験と実現象の違い, 実験の不確かさ

科学的推論としての認識

- 演繹的推論 (deductive reasoning)
 - 一般原理から個々を推論する
 - 実験データによる実証
 - 論理的帰結
 - 反例が見つからない
- 帰納的推論 (inductive reasoning)
 - 個々の情報から一般事象を導き出す
 - 実験データからの推論
 - 事実の積み重ね
 - 確率的正しさ

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

5

現象に対する数理モデル



- 数理モデル
 - 現象を抽出, 一般化, 抽象化し, 数式で表現
 - 導出過程, 適用範囲 → 不確かさの生じる要因
- CAEで現れるモデル
 - 物理モデル
 - 基本原理(公理)から演繹的に導かれる (導くことのできるもの)
 - 例: 釣り合い方程式, 変位-ひずみ関係式
 - 現象論モデル
 - 現象のある側面を表現するように作られたもの
 - 例: 材料構成則
- 帰納的(統計的)モデル
 - 現象から帰納的あるいは統計的に導かれたもの
 - 例: 種々のばらつき

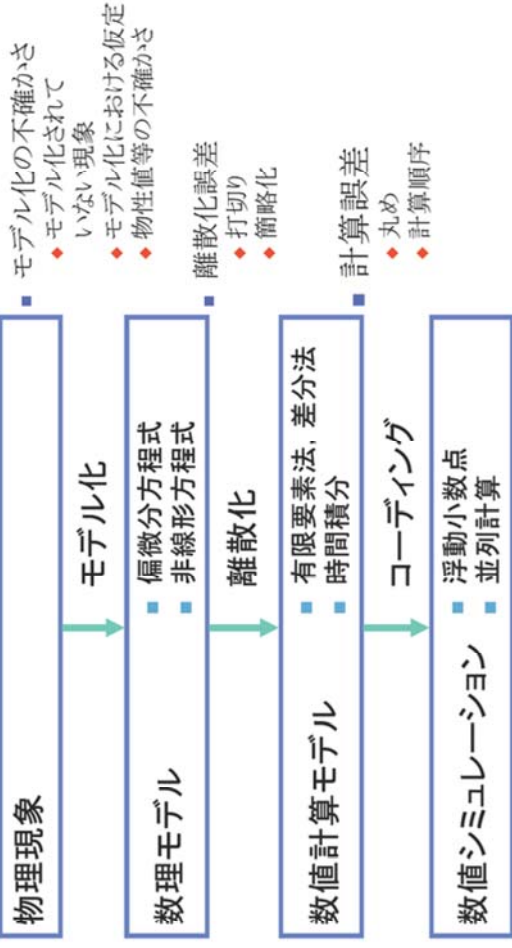
帰納的推論に基づくモデルが必須

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

7

モデリングとシミュレーション



- モデル化の不確かさ
 - ◆ モデル化されて
 - いない現象
 - ◆ モデル化における仮定
 - ◆ 物性値等の不確かさ
- 離散化誤差
 - ◆ 打ち切り
 - ◆ 簡略化
- 計算誤差
 - ◆ 丸め
 - ◆ 計算順序

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

6

固体力学における数理モデル



- 固体力学の支配方程式
 - 変位-ひずみ関係式 **物理モデル**
 - 変形の幾何学
 - ひずみの定義: 微小変形, 大たわみ, 有限ひずみ

現象論モデル

- 材料構成則
 - 応力-ひずみ関係: 弾性, 塑性, 損傷, 等方, 異方性

物理モデル

- つり合い方程式
 - 力の釣り合い → 応力のつり合い

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

8

材料構成則

- 材料の応答
 - 基本原理: 分子・原子の配置・移動 → 量子力学

演繹的推論に基づくモデル

- 線形問題
 - 微小変形線形弾性体: 一般化フックの法則 (物理モデル)
 - 等方性
 - 異方性

現象論モデル

- 非線形問題

- 非線形応答
 - 非線形弾性体
 - 塑性モデル
 - 損傷モデル

現象論モデル

帰納的推論に基づくモデル

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

9



数値シミュレーションの置かれた状況

- 現状の数値シミュレーション
 - 必ず帰納的モデル (現象論モデル) を含む
 - パラメータは実験、実測で求めなければならない
 - ← 実験等に合うように計算しているだけ

演繹的な正しさの証明は不可能

- 数値シミュレーションの重要性の拡大
 - 社会に重大な影響を与える判断 (災害予測等)
 - 人命に直接影響を与える判断 (医療等)
- 数値シミュレーションに対するcredibilityの確保
 - 社会的納得が得られる数値シミュレーション
 - 規制科学 (Regulatory Science)

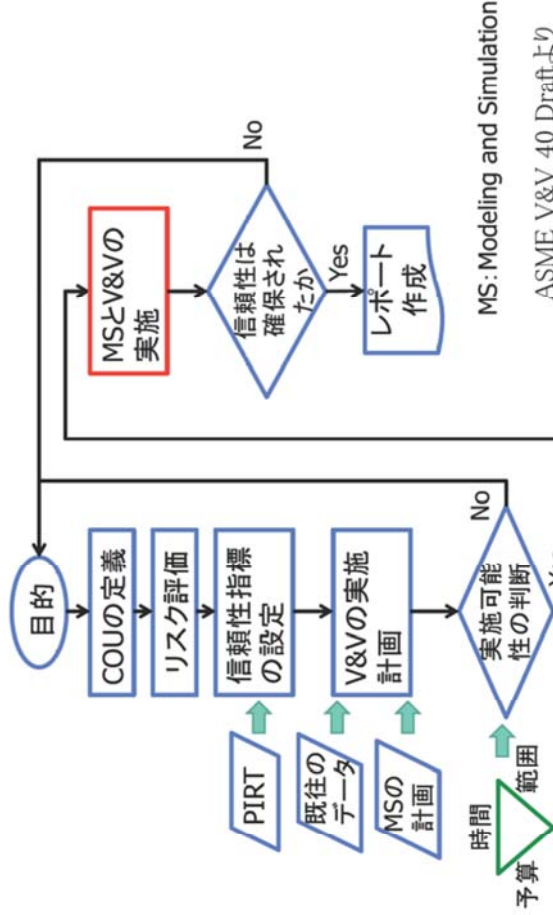
2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

10



信頼性確保の戦略 Credibility Strategy Overview



2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

11



NASA-STD-7009 リスク評価



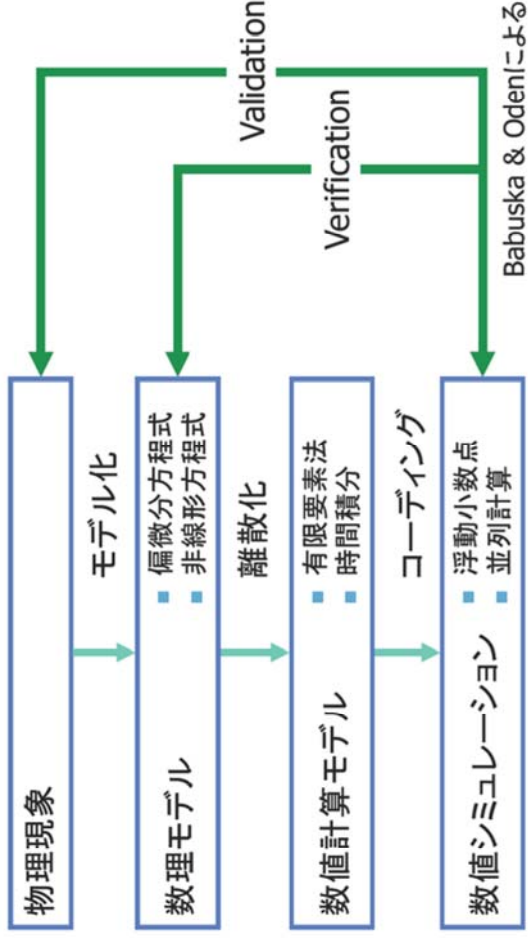
NASA-STD-7009より

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

12



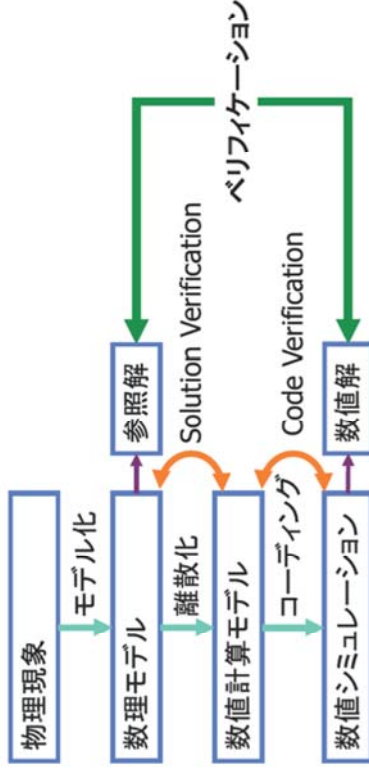


検証(verification)

- 近似(計算モデル)とコード(実装)の両方を検証
 - Solution verification (計算モデル, 計算手法の検証)
 - 数学的証明
 - 近傍問題の方法(帰納的検証)
 - Code verification (コード, ソフトウェアの検証)
 - 古典的理論解, 解析解との比較
 - 創成解(物理的な設定に基づかない検証用問題)との比較
 - Solution verificationとCode verificationを独立に行う
 - ケースは多くない
- 検証の観点
 - モデルの適切な定義
 - 連続問題としての記述
 - 適切問題(Well-posedness)
 - 近似の妥当性
 - 解の収束性
 - メッシュ依存性
 - パッチテスト(収束に対する必要条件)

検証(Verification)

- 定義された問題を適切に(正しく)解いているか
 - 数値モデルが出发点
 - 数値モデルに対する信頼できる参照解と計算された数値解の比較
 - バリデーションとは独立であり, バリデーションの前に行う必要がある
 - 物理現象については議論しない(できない)



コードの検証(Code Verification)

- コード, ソフトウェアの検証
 - 数値モデルの解として正しい結果が得られるコード, ソフトウェアとなっている
 - アルゴリズムが適切である
 - コードの間違えがない
- 実際に計算を行い, 数値解を吟味する
 - 古典的理論解との比較
 - 創成解(Manufactured solution)との比較
 - 数値解の収束オーダーの確認

古典的理論解

- 偏微分方程式の解析解が得られる問題
 - 単純な領域
 - 1次元
 - 円形, 球形, 長方形, 直方体
 - ほとんどが線形問題
 - 初等関数およびその級数によって解が表示される
- 問題点
 - 非線形問題 (特に2次元以上) に対応できない
 - 形状, 境界条件が単純すぎることが多い
 - 計算が煩雑になることがある

創成解の方法

Method of Manufactured Solution, MMS

- 支配方程式 $L(u) = 0$ (非線形方程式を含む)
 - 解 u , 微分作用素 L
- 創成解の方法
 1. 創成解 u_m を既知の初等関数による表現で設定
 2. ソース項 (体積力) の計算 $f_m = L(u_m)$
 3. 新しい問題 $L(u) = f_m$
 - 創成解を厳密解とする問題
 - この問題を数値計算し, 近似解と創成解を比較する
- 物理的には自然ではない問題設定となることが多い

P. J. Roache and S. Steinberg, "Symbolic manipulation and computational fluid dynamics," AIAA Journal, Vol. 22, No. 10, 1984, pp. 1390-1394.

創成解の方法の例

- 対象問題の数値計算
 - 問題設定
 - 外力, 境界条件
 - 数値計算結果
 - 近似解: 変位
- 創成解の方法
 - 解の仮定
 - 変位を関数で仮定: 創成解
 - 問題設定
 - 変位から外力, 境界条件を計算
- 数値計算結果
 - 近似解: 変位

物理的合理性を欠く問題における検証になりやすい

無関係 独立 比較

計算手法の検証 (Solution Verification)

- 計算手法を検証する
 - 適切な数理モデル (偏微分方程式等) の近似となっているか
 - 演繹的な計算手法の評価 = 数学理論による証明
 - 数学的に証明されていれば, 一つの数値計算例があればよい
- 実際の状況
 - 数学理論が確立した計算手法は多くない
 - 数値解の漸近挙動 (メッシュ再分割により数値解がある値に収束する) は状況証拠でしかない
 - 単調収束が証明されていない手法に対して, GCIだけで判断することは不十分
- 数学理論で演繹的に検証できない計算手法に対して帰納的に検証できないか (山田, 2014)
 - 問題: 適切問題
 - 問題の持つ数学的性質が数値解に当てはまることを確認する

適切問題に対する帰納的検証



- 対象とする問題の近傍で3つの性質を確認する
 - 解の存在
 - 解の一意性
 - 解のデータに対する連続的依存性
- メッシュ細分により厳密解に収束する数値解が得られる
- 複数の数値解のノルムと $n \rightarrow$ ス項のノルムをチェック

$$\|u_1^h - u_2^h\| \leq C \|f_1 - f_2\|$$

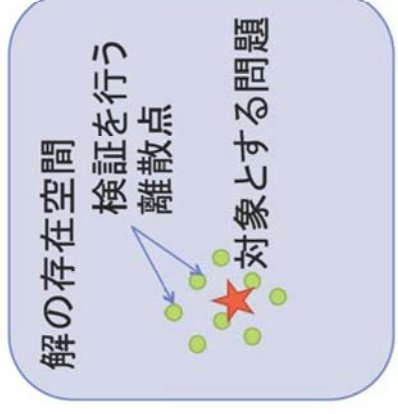
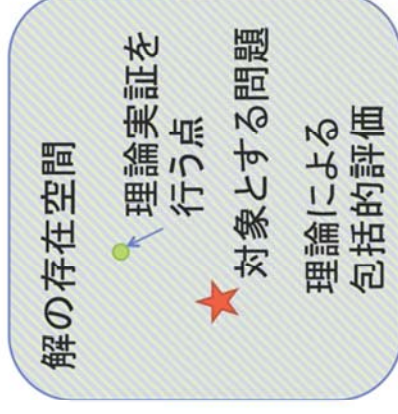
- 対象とする問題の近傍に厳密解が存在する問題を設定する

近傍問題の方法

演繹的検証と帰納的検証



- 演繹的検証
- 帰納的検証



- 基本的には数学的証明
- 評価点は少なくとも良い

- 対象とする問題の近傍に複数の評価点が必要

近傍問題の方法(Roy et al. 2003)



Method of Nearby Problems, MNP

- 支配方程式 $L(u) = 0$ (非線形方程式を含む)
 - 解 u , 微分作用素 L
- 近傍問題の方法
 1. 支配方程式の近似解 \bar{u}^h を得る
 2. 近似解 \bar{u}^h を滑らかな関数で近似し近傍解 u_n とする
 3. ソース項(体積力)の計算 $f_n = L(u_n)$
 4. 新しい問題(近傍問題) $L(u) = f_n$

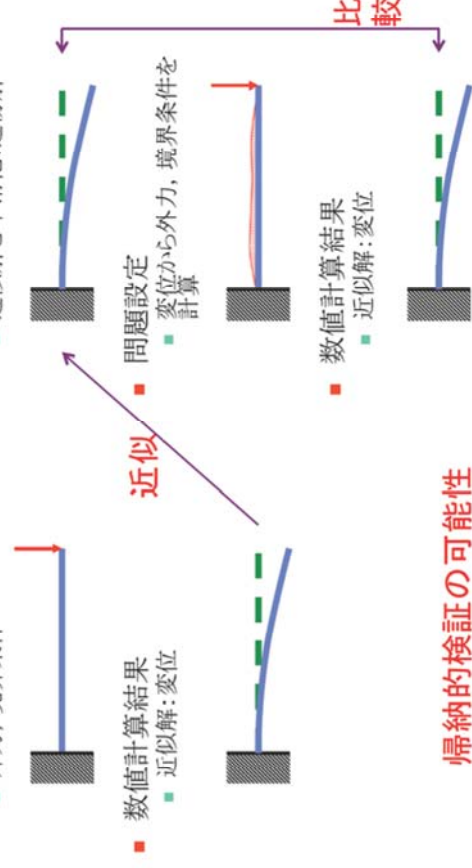
- 近傍解を厳密解とする問題
- この問題を数値計算し, 近似解と厳密解を比較する

- 対象とする問題に近い問題を構成している → 帰納的検証に用いる

近傍問題の方法の例



- 対象問題の数値計算
 - 問題設定
 - 外力, 境界条件
- 近傍問題の方法
 - 解の仮定
 - 近似解を平滑化: 近傍解



帰納的検証の可能性

- 応力の空間微分が必要となる $f_n = -\nabla \cdot \sigma(u_n)$
 - 応力は変位の簡単な関数ではない
 - 弾塑性構成則では, 応力の空間微分はひずみみの他に材料状態を記述する内部変数(塑性状態フラグ, 相当塑性ひずみ等)に依存する
- 解は履歴(載荷経路)に依存する
 - 近傍解は, 載荷ステップにおける近似解から構成することができる
 - 載荷ステップ間の近傍解の履歴を定義することが必要

創成解の方法の固体力学問題への適用が見られない原因

弱定式化の基づくソース項(体積力)の計算 (山田, 2015)

- 支配方程式の弱表現 (仮想仕事式)

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds$$

ここで v 仮想変位 $\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ 仮想ひずみ
- 創成解, 近傍解 u_n は弱形式を満足する(一つの弱解である)

$$\int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(v) dx = \int_{\Omega} f_n \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g_n \cdot v ds$$

- 仮想変位を有限要素法で離散化

$$\int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(v^h) dx = \int_{\Omega} f_n \cdot v^h dx + \int_{\Gamma_N} g_n \cdot v^h ds$$

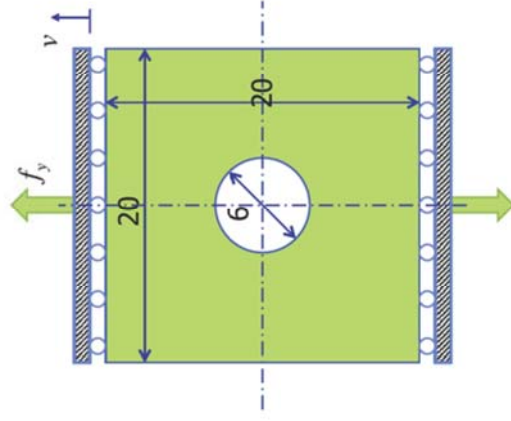
- 創成解, 近傍解に対する外力(体積力と表面力)に対する等価節点力 $V \mathbf{F}_a^{ext} = \int_{\Omega} f_n \cdot v^h dx + \int_{\Gamma_N} g_n \cdot v^h ds = \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(v^h) dx$

$$\mathbf{F}_a^{ext} = \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}_a^T \sigma(u_n) dx \right\}$$

応力の空間微分無し
内力ベクトルと類似の計算

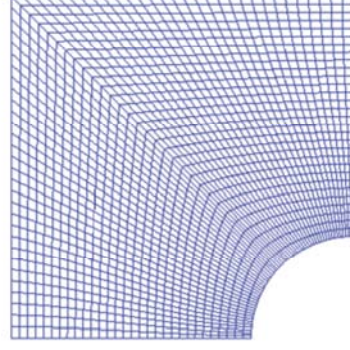
近傍問題の方法の適用例

- 円孔付き平板
 - 平面ひずみ
 - 微小変形
 - 弾塑性材料
 - von-Mises 降伏条件
 - J2 流れ則
 - 等方線形硬化
 - ヤング率 $E = 2.0 \times 10^6$
 - ポアソン比 $\nu = 0.3$
 - 降伏応力 $\sigma_y = 2.0 \times 10^3$
 - 硬化係数 $H = 2.0 \times 10^3$
- 有限要素近似
 - 対称性により 1/4 部分
 - 双1次四辺形要素 (Q4)

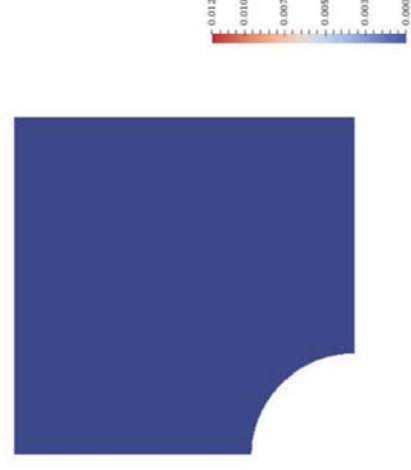


対象とする問題

- 有限要素分割 ($h=0.333$)



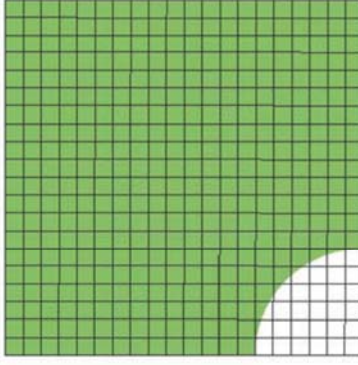
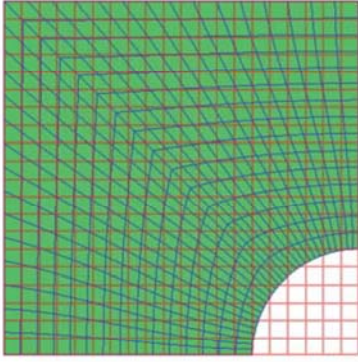
- 有限要素解の相当塑性ひずみ分布



スプライン関数への投影



- 一様スプライン
- スプライン関数で表された近傍解
- 3次Bスプライン
- 一様 20x20 セル



2015/9/16

土木学会全国大会

近傍問題の近似解(1)



- $h=0.333$
- 相当塑性ひずみ
- 節点力



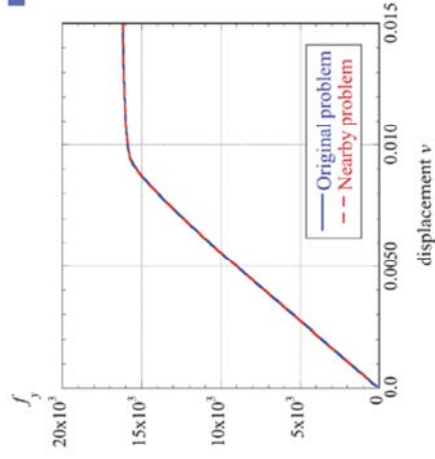
2015/9/16

土木学会全国大会研

近傍問題の近似解(2)



- 近傍問題の近似解は対象問題の近似解とほぼ一致

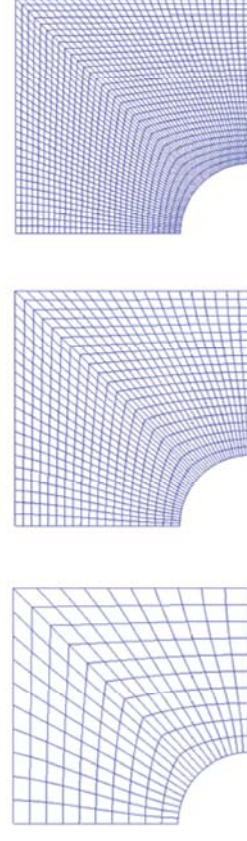


境界上の外力と変位の関係

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

メッシュ細分割



$h=1.0$

$h=0.5$

$h=0.333$

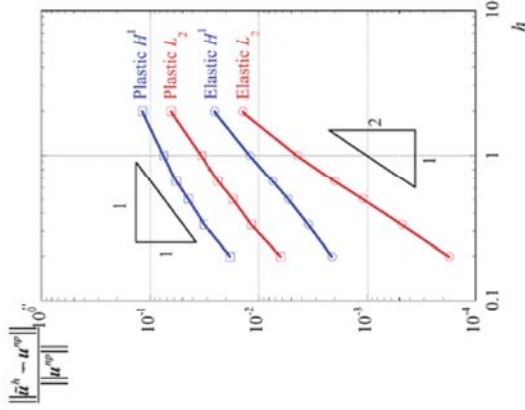
31

土木学会全国大会研究討論会

2015/9/16

32

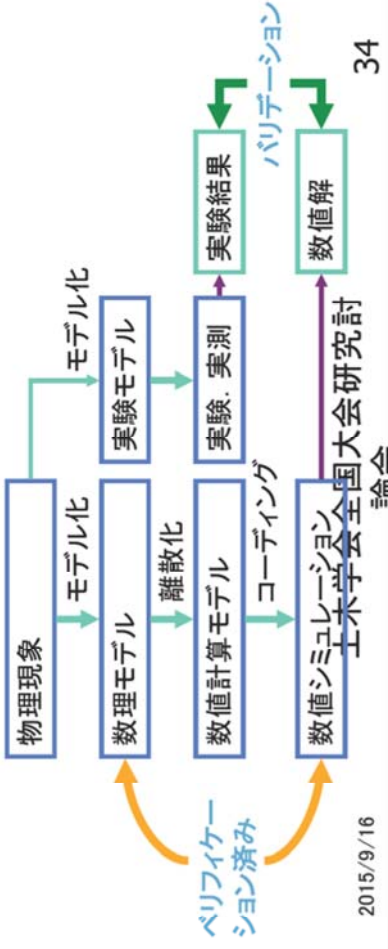
近似解の収束



- 誤差のノルムによる評価
 - H^1 ノルム: 変位とひずみで見えた誤差
 - L_2 ノルム: 変位で見えた誤差
- 弾性域 (最初の荷重ステップ)
 - H^1 ノルムにおいて1乗収束
 - L_2 ノルムにおいて2乗収束
- 解の滑らかさを仮定した数学理論 (Nitscheの技巧) 通りの収束
 - 塑性域 (最後の荷重ステップ)
 - H^1 ノルムにおいて1乗収束
 - L_2 ノルムにおいて1乗収束
 - L_2 ノルムの収束が悪化 ← 解の滑らかさが失われた

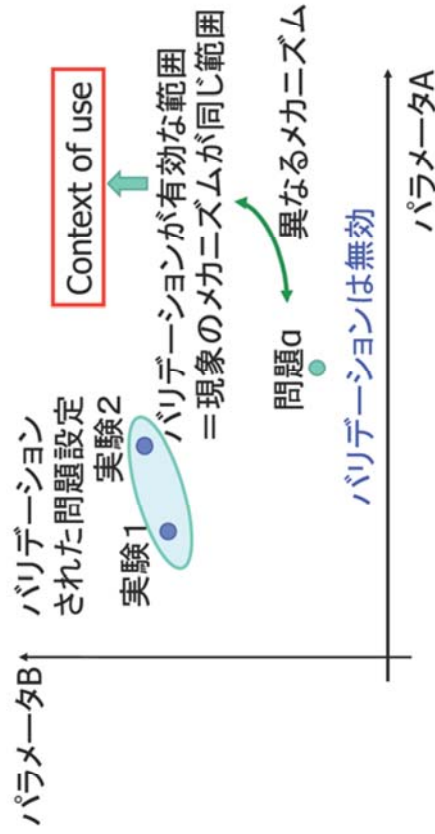
バリデーション(Validation)

- 物理現象に対して適切な計算であるか
- 現象に対するモデル化の妥当性 (モデルの選択を含む)
- バリデーションは問題毎に、解析者 (ユーザ) が行う
- 計算手法・コードに対してではなく、対象となる問題設定についての計算結果に対して行う
- バリデーションされたコードを用いる



バリデーションの適用範囲

- バリデーションは問題毎
- モデルで想定する現象のメカニズムの範囲で検討



バリデーションの方法

- 実験・観測結果との比較
 - 実験条件と計算条件の対応
 - 実験における不確かさと計算条件の不確かさを考慮
 - 物性値の決定に用いた実験結果とは別の実験結果を用いる
 - 実験と等価な物理モデルのシミュレーションを用いることも可
- 評価手法
 - 定性的比較
 - 現象のメカニズム
 - 定量的比較
 - 特徴量の決定

何が対応していれば良いのか
どこまで対応していれば良いのか
定点对应していれば信頼できるのか

単純な比較では不十分

V&V+UQ

- 予測能力 = 精度 + 定量化された不確かさ
- 不確かさの定量化 Uncertainty Quantification(UQ)
 - 不確かさの要因の特定
 - 想定される事象をリストアップ
 - 重要度解析
 - 不確かさの大きさの同定
 - 実験 (特定要因に対する実験)
 - 逆解析的手法, パラメータ同定
 - 不確かさの影響度評価
 - 不確かさの伝播

■ V&V+UQ = Assessment of Credibility (解の信頼性の評価)

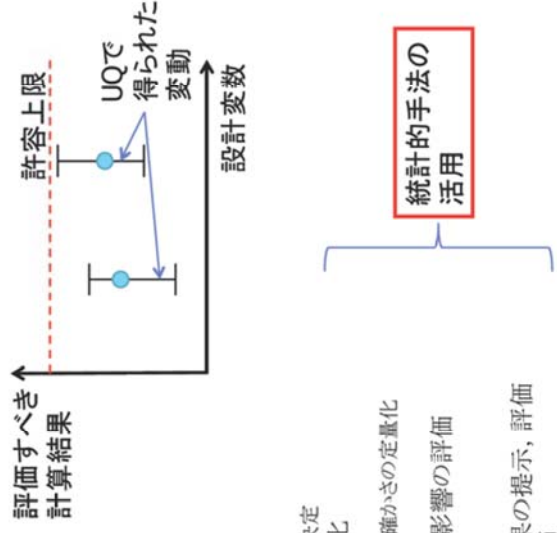
2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

37

UQの考え方

- UQの目指すもの
 - 設計等の意思決定に用いられる計算結果に含まれる不確かさを明らかにし、より妥当な意思決定を行う
 - Error bar付計算結果
- 手続さ
 - 問題の特徴の定義, 同定
 - 基本的なメカニズムの理解
 - 注目すべき物理量, 指標の決定
 - 不確かさ要因の抽出, 定量化
 - 要因の列挙
 - 測定, 観測, 実験等による不確かさの定量化
 - 重要度, 影響度の解析
 - 不確かさの結果への定量的影響の評価
 - 不確かさの伝播
 - 要因の感度
 - 不確かさを反映した計算結果の提示, 評価
 - 確率あるいは区間による評価

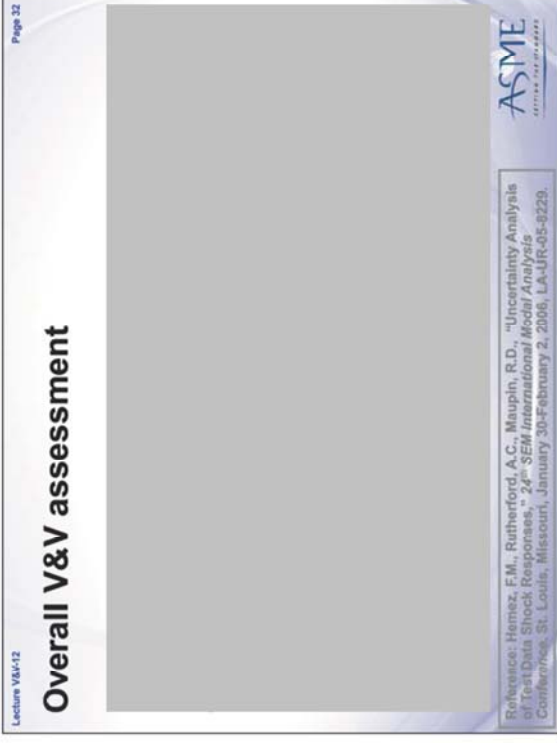


2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

39

信頼区間付き結果表示



ASME V&V 2014 short courseより

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

38

UQの手法(1)

- 不確かさの表示
 - 確率分布
 - 区間表示
- 不確かさの計測
 - 統計的サンプリング
 - 実験計画法(タグチメソッド等)
 - ランダムサンプリング
- 不確かさの定量化
 - 適切な実験計画
 - シミュレーションにおけるUQに利用できるデータ取得
 - 高度な計測技術
 - 新しい計測技術の開発

信頼性解析で用いられる手法

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

40

UQの手法(2)

- 不確かさの計算結果への影響の評価
 - 感度解析, スクリーニング
 - 分散解析
 - 解析的感度解析, アルゴリズム自動微分
 - 実験計画法+応答曲面
 - モンテカルロ法
 - MCMC(Markov Chain Monte Carlo)
 - ← 確率密度計算の効率化
 - メタモデル, 代替モデル ← 計算負荷の低減
 - 多項式回帰, 応答曲面
 - クリギング(Kriging)法 ← 高度な補間法
 - ニューラルネットワーク

システム化された構造物全体の評価

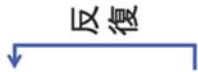
2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

41

V&V, UQプロセスの例

- コード検証
- 応答特性の抽出
- 数値解の収束評価
- 局所的感度解析(差分法による)
- 数値実験計画
- 大域的感度解析, 影響度解析
- メタモデルの開発
- 実験との比較, 相関評価
- モデルの更新, キャリブレーション
- 不確かさ伝播を含めた評価
- 解析, 実験範囲での予測精度の評価
- 精度と不確かさの外挿



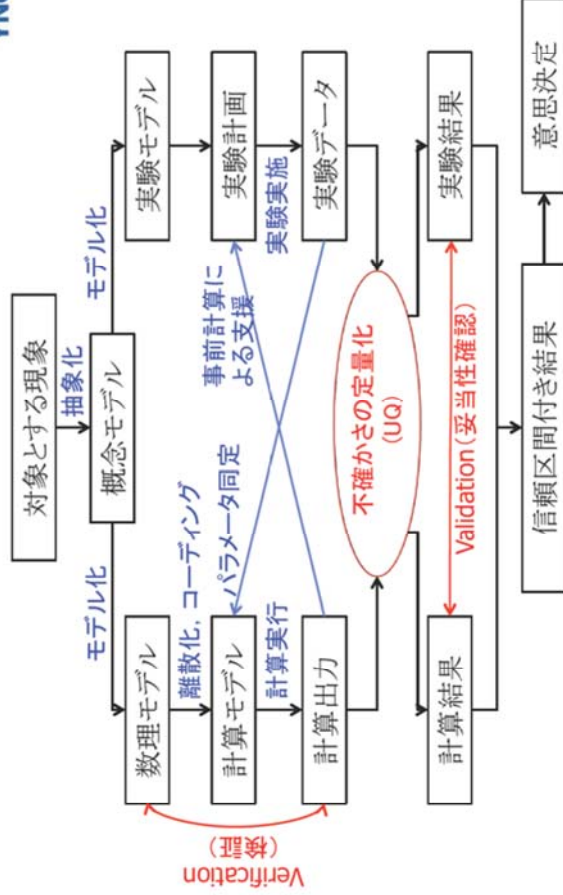
ASME V&V 2014 short course より

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

42

実際のV&V, UQの位置づけ



2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

43

ASME V&Vの活動組織

- ASME Verification and Validation Standards Committee
 - 標準化(Codes and Standards)活動の1つ
- Subcommittee
 - V&V 10: V&V in Computational Solid Mechanics
 - V&V 20: V&V in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer
 - V&V 30: V&V in Computational Simulation of Nuclear System Thermal Fluids Behavior
 - V&V 40: V&V in Computational Modeling of Medical Devices
 - 具体的な適用対象(Heart valve, Stent etc.)に対するWG

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

44

- 発行済み
 - 2006年 V&V 10 Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics
 - 2009年 V&V 20 Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer
 - 2012年 V&V 10.1 An Illustration of the Concepts of Verification and Validation in Computational Solid Mechanics
- 今後の予定
 - V&V 10.2 Role of Uncertainty Quantification in Verification and Validation of Computational Solid Mechanics Models
 - V&V 10.3 Role of Validation Metrics in Verification and Validation of Computational Solid Mechanics Models (draftを委員会で回覧, 検討中)
 - V&V 30 - Standard for Verification and Validation of System Analysis and Computational Fluid Dynamics Software for Nuclear Applications
 - V&V 40 - Standard for Verification and Validation in Computational Methods for Medical Devices (査読中)

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

45

- 目的: V&Vの情報交換の場
 - 日程, 場所
 - 2012: 5/3-5, Las Vegas
 - 2013: 5/22-24, Las Vegas
 - 2014: 5/7-5/9, Las Vegas
 - short courseが開始(5/5-6, 2日間)
 - 2015: 5/13-15, Las Vegas
 - 2016: 5/18-20, Las Vegas以外を予定
 - 研究, 技術に関する議論
 - Standardに対する意見の収集
 - V&Vの啓蒙
 - 具体的な取り組みに関する議論
- 規模
 - 発表件数: 250件程度(4パワレールセッション)
 - 参加者: 300~400名程度
 - academiaはやや少ない
 - 原子力, 医療系が多い
 - National Laboratoryの関係者が主導的役割

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

46

まとめ(1)

- ASME V&V symposiumで一貫して議論されている方向性
 - CAE, Modeling and Simulation
 - シミュレーションに基づき, 設計等の意思決定を行う
 - V&V
 - Credibility Assessment
 - Verification and Validation (検証と妥当性確認)
 - Uncertainty Quantification (不確かさの定量化)
 - 目的
 - 規制機関, 社会に納得してもらう ← 対象: 原子力, 医療
 - 民生利用: そのままでは過剰 ← 一部の取り組み, 技術を取り入れる

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

47

まとめ(2)

- V&V, UQの取り組み
 - シミュレーションを中心に据えた工学的判断プロセスそのもの
 - 基本的には新しい考え方ではない
 - 洗練された手法, システム化された取り組みの開発が進んでいる
- 求められる能力
 - 幅広い知識
 - 不確かさ要因の推定, 特定
 - 精度の高い実験の計画, 実施
 - 統計的手法の運用能力

2015/9/16

土木学会全国大会研究討論会

48

地盤の不確実性の取扱いについて

特に地盤パラメータの空間的バラツキと
解析モデルのモデル化誤差について

2015年9月16日

岐阜大学 名誉教授 本城 勇介
新潟大学 自然科学系 大竹 雄

土木分野における数値解析のV&Vの課題とは？

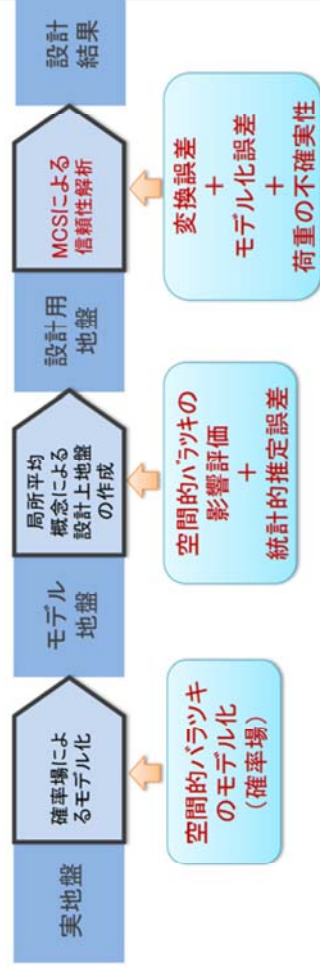
応用力学委員会

土木分野の数値解析におけるV&Vに関する小委員会
土木学会全国大会パネルディスカッション

(注) GRASP

Geotechnical Reliability Analysis by a Simplified Procedure
簡易地盤信頼性解析手法, 「全体を掴む(grasp)・把握する。」

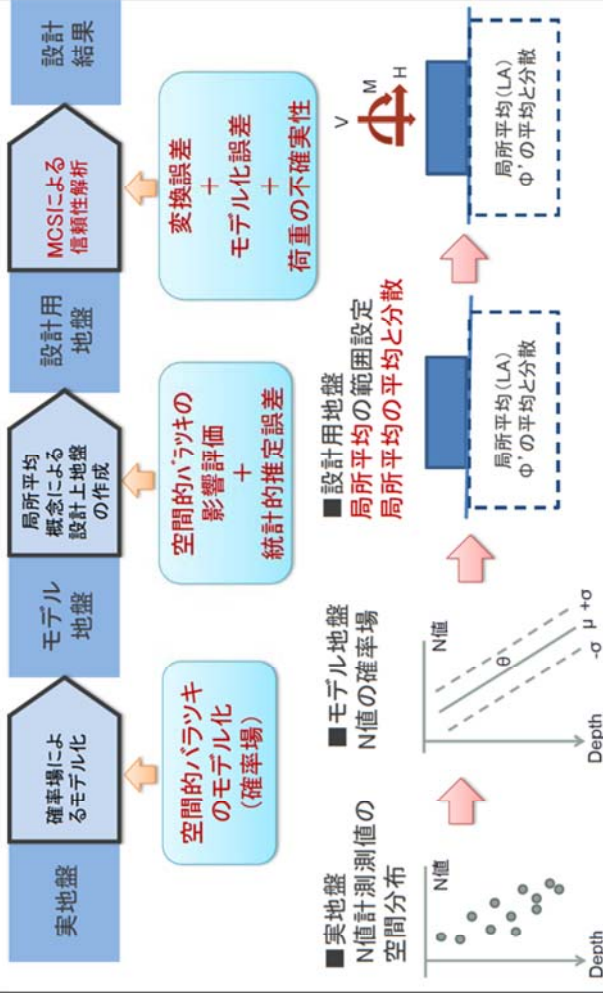
地盤信頼性設計手順 (GRASP) と不確実性



信頼性設計 (解析) とは、設計手順の不確実性の定量化と伝播解析を中心とした、システム分析と統合である。(Analysis and Synthesis)

「統合」と言うのは、設計は最終的に意思決定の行為なので、分析だけに終わらず、統合が必要と言う意味である。

地盤信頼性解析手順 (GRASP) と不確実性



地盤構造物信頼性解析 (GRASP) の特徴と不確実性

- **地盤は不均質な連続体である。**
 - 不均質性が構造物の性能に与える影響評価
- **サイトごとに地盤調査により地盤パラメータ値を決定し設計する**
 - 統計的推測理論の必要性
- **工学的判断と設計計算精度の限界**
 - 要求される計算の精度、工学的判断の重視
- **実大規模に近い載荷試験や、破壊例の存在**
 - モデル化誤差の定量化の可能性

空間的バラツキの影響
統計的推定誤差

地盤を確率場としてモデル化し、対処する。ここでは、**局所平均** (Local Average; LA) がキーワードとなる。

変換誤差

N値から ϕ やEへの変換等、多くの研究の蓄積がある。

モデル化誤差

載荷実験、破壊例等から定量化する。

地盤構造物信頼性解析 (GRASP) の特徴と不確実性

- 地盤は不均質な連続体である。
 - 不均質性が構造物の性能に与える影響評価
- サイトごとに地盤調査により地盤パラメータ値を決定し設計する
 - 統計的推測理論の必要性
- 工学的判断と設計計算精度の限界
 - 要求される計算の精度, 工学的判断の重視
- 実大規模に近い載荷試験や, 破壊例の存在
 - モデル化誤差の定量化の可能性

空間的パラツキの影響
統計的推定誤差

地盤を確率場としてモデル化し, 対処する. ここでは, **局所平均** (Local Average: LA) がキーワードとなる.

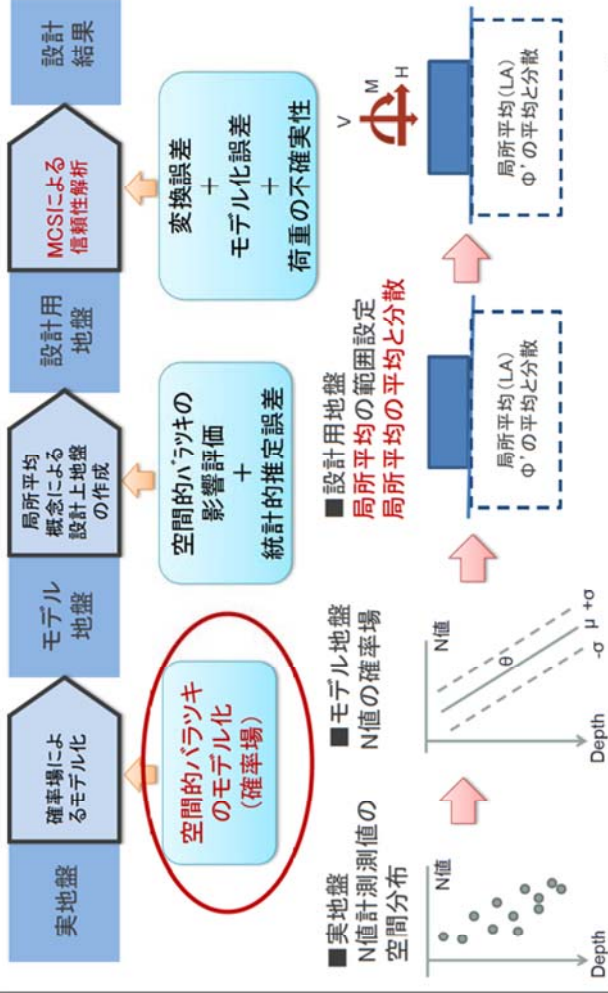
変換誤差

N値からφやEへの変換等. 多くの研究の蓄積がある.

モデル化誤差

載荷実験, 破壊例等から定量化する.

地盤信頼性解析手順 (GRASP) と不確実性



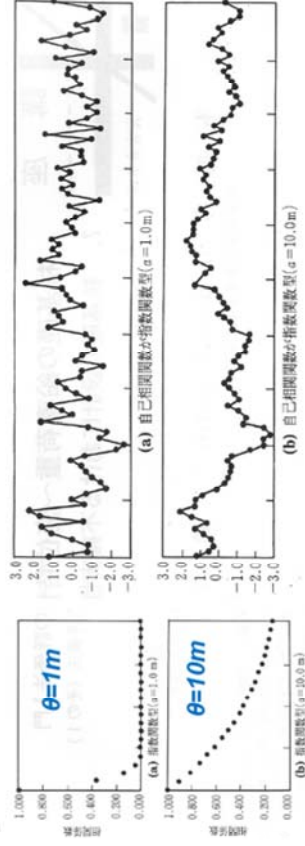
確率場(弱定常確率場)

- 平均関数 : $E[Z(x)] = \mu_z$
- 分散関数 : $Var[Z(x)] = E\{[Z(x) - \mu_z]^2\} = \sigma_z^2$
- 自己共分散関数 : $Cov[Z(x), Z(x + \Delta x)] = E\{[Z(x) - \mu_z]\{Z(x + \Delta x) - \mu_z\}\} = C(\Delta x) = \sigma_z^2 \rho(\Delta x)$
- 自己相関関数 (自己相関距離: θ) : $\rho(\Delta x) = \exp\left[-\frac{\Delta x}{\theta}\right]$: 指数型
- 自己相関関数 (自己相関距離: θ) : $\rho(\Delta x) = \exp\left[-\left(\frac{\Delta x}{\theta}\right)^2\right]$: ガウス型

自己相関関数: 空間的パラツキの構造

- 以下に同じ平均値と分散値を持つが, 異なる自己相関構造を持つ
- 2つの確率場のシミュレーション例を示す.
- 自己相関関数は, 空間的パラツキの構造を示す.
- 空間的パラツキの影響評価, 統計的推定誤差評価でキーとなる.

$\mu=0, \sigma^2=1.0, \theta=1m \text{ or } 10m$



- 自己相関関数 ⇔ パワースペクトル (同値). 両者は, フーリエ(逆)変換の関係 (Wiener-Khinchineの公式)
- 地盤調査から直接, 既往の研究事例等を参考に設定できる.

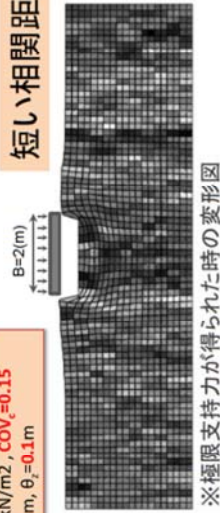
詳細計算による空間的バラツキの影響評価(2)

- RFEM(Fenton and Griffiths)の方法
- 浅い剛体基礎の弾性変形、弾塑性(支持力)に特化した計算プログラム
- 破壊基準: Mohor-Coulomb, Drucker-Prager
- 関連流れ則(ダイレイタンション)係数 ψ =内部摩擦角の※支持力公式との整合性に配慮
- 乱数による場の生成 ⇒ 支持力計算(繰返し試行する)

$$\mu_c = 30 \text{ kN/m}^2, \text{COV}_c = 0.15$$

$$\theta_c = 0.1 \text{ m}, \theta_s = 0.1 \text{ m}$$

短い相関距離

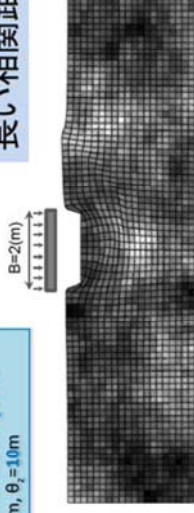


※極限支持力が得られた時の変形図

$$\mu_c = 30 \text{ kN/m}^2, \text{COV}_c = 0.15$$

$$\theta_c = 10 \text{ m}, \theta_s = 10 \text{ m}$$

長い相関距離

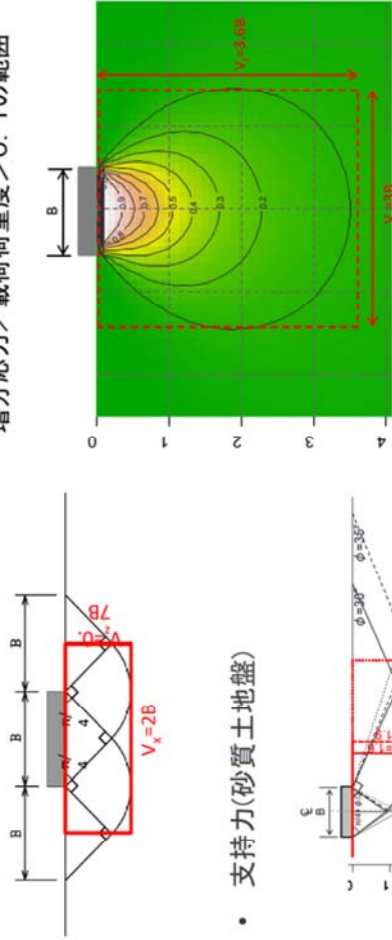


※極限支持力が得られた時の変形図

13

空間的バラツキの影響評価: 局所平均の範囲

- 支持力(粘性土地盤)
弾性変位(沈下)
増分応力/載荷荷重度 > 0.1 の範囲



(b) $B \times 3B$

- 支持力(砂質土地盤)

2015/9/7

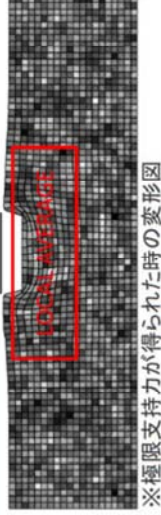
15

- 乱数による場生成 + FEM解析(粘性土地盤の支持力計算例)

※RFEM(Fenton and Griffiths)による解析

$$\mu_c = 30 \text{ kN/m}^2, \text{COV}_c = 0.15$$

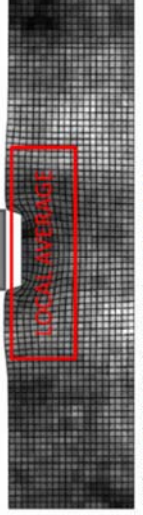
$$\theta_c = 0.1 \text{ m}, \theta_s = 0.1 \text{ m}$$



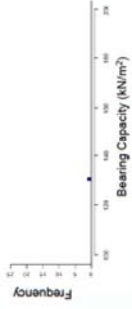
※極限支持力が得られた時の変形図

$$\mu_c = 30 \text{ kN/m}^2, \text{COV}_c = 0.15$$

$$\theta_c = 10 \text{ m}, \theta_s = 10 \text{ m}$$



※極限支持力が得られた時の変形図



Vanmarcke(1977)の分散関数

$$Z_V(x) = \frac{1}{V} \int_V Z(u) du$$

$$\sigma_{Z_V}^2 = E[(Z_V(x) - \mu_z)^2]$$

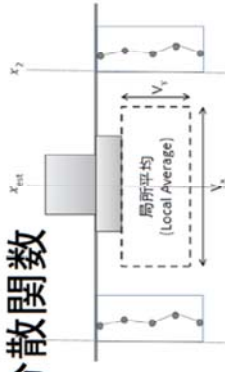
$$= E\left[\frac{1}{V^2} \int_0^V \int_0^V (z(u) - \mu_z)(z(v) - \mu_z) du dv\right]$$

$$= \sigma_z^2 \Gamma^2(V)$$

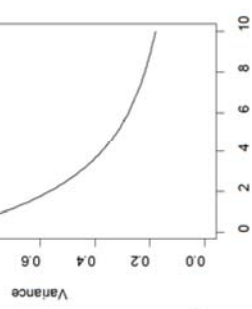
- 自己相関関数が指数型の場合の分散関数

$$\Gamma^2\left(\frac{V}{\theta}\right) = \left(\frac{\theta}{V}\right)^2 \left[2\left(\frac{V}{\theta} - 1 + \exp\left(-\frac{V}{\theta}\right)\right)\right]$$

計測値にみられる分散 $\sigma_{Z_V}^2$ ではなく、局所平均の分散 σ_z^2 を用いて信頼性解析を行えばよい



計測値にみられる分散から低減



2015/9/7

14

具体的な計算方法

- 浅い基礎の支持力問題 ($Q_d = c N_c$: 支持力公式)

空間的ばらつきモデル化
 $\mu_c, \sigma_c^2, \rho_c(\tau, \theta)$

局所平均の範囲の設定
 $V_x = 2B, V_z = 0.7B$

空間的ばらつき低減
 Vanmarckeの分散関数
 $\Gamma^2(V, \theta) = \Gamma_x^2(V_x, \theta) \cdot \Gamma_z^2(V_z, \theta)$
 $\sigma_{cV}^2 = \Gamma^2(V, \theta) \sigma_c^2$

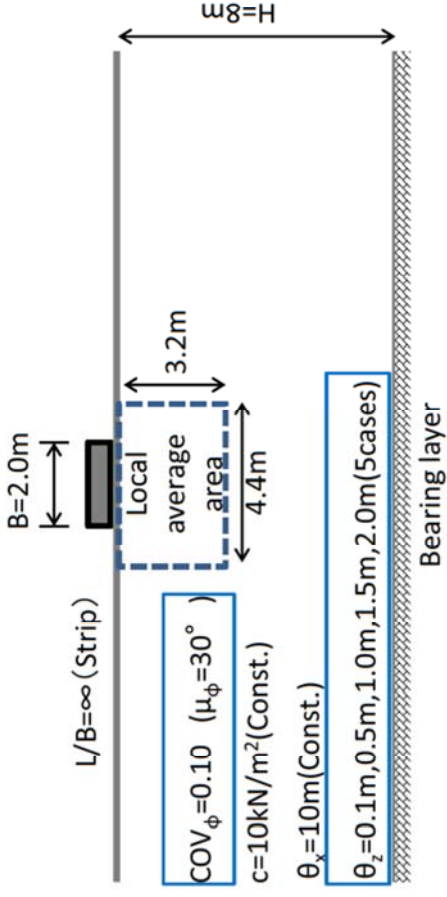
$Q_d = c N_c$ (支持力公式)を用いたMCS

信頼性評価

2015/9/7

17

試算による検証

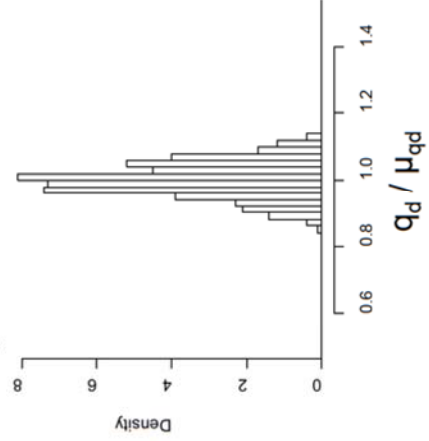


2015/9/7

18

試算による検証

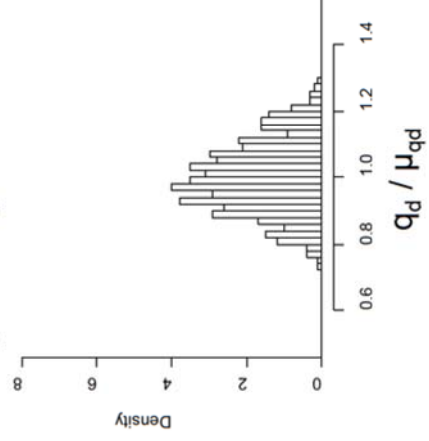
$\theta_x = 10\text{m}$ $\theta_z = 0.1\text{m}$



(a) RFEM
 $n = 1000$

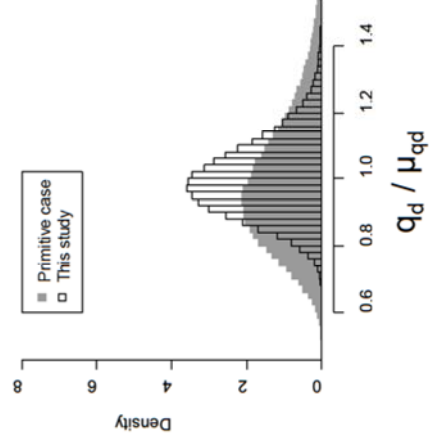
試算による検証

$\theta_x = 10\text{m}$ $\theta_z = 0.5\text{m}$

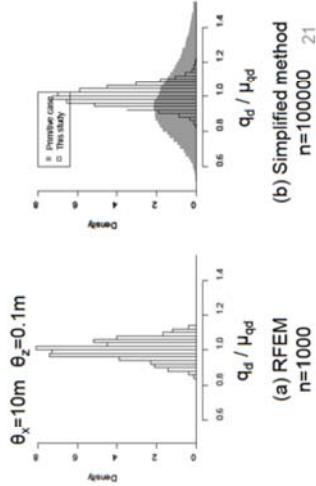
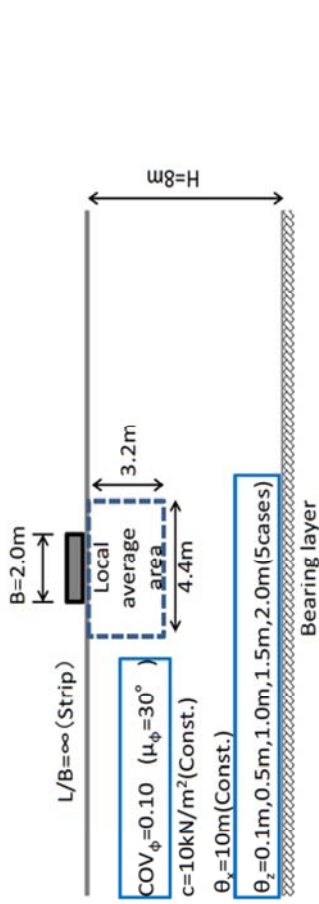


(a) RFEM
 $n = 1000$

(b) Simplified method
 $n = 100000$

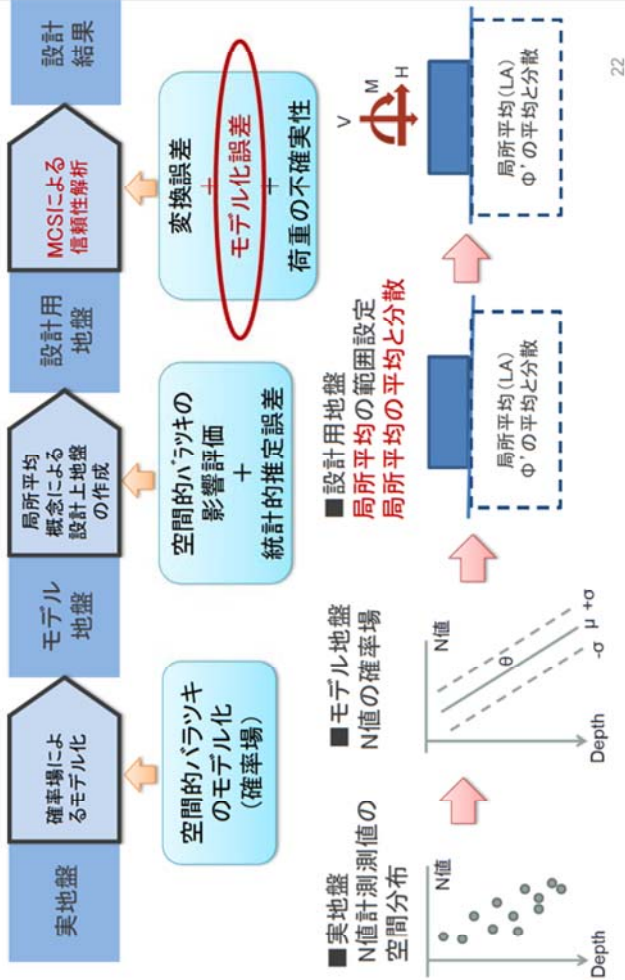


GRASPIによる空間的パラッキの簡易影響評価



適切な範囲の局所平均値の確率的性質(平均値と分散値)を用い、確率有限要素法等の複雑な方法で計算されるのと同等の空間的パラッキの構造物の性能に与える影響評価が可能である。

地盤信頼性解析手順と不確実性

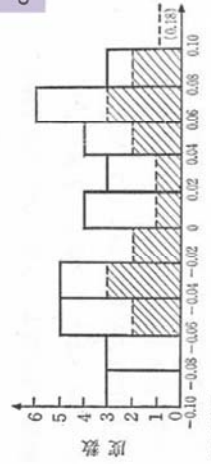


モデル化誤差の定量化方法

信頼性解析の破壊確率を定量的に意味のあるものにする。

- 盛土の円弧すべり解析 ($\phi=0$), Matsuo and Asaoka(1976)の例
- 国内17例, 海外22例の軟弱地盤上の盛土の破壊事例と計算結果との差異を整理した。[(破壊例より推定された真の安全率) + (計算安全率) + (誤差)]
- 誤差は $-0.1 \sim +0.1$ の間に一様分布
- Wu(2009)が再調査: bias=0.98-1.0, COV=0.067-0.087

国内17例, 海外22例の軟弱地盤上盛土の破壊事例と照査式の誤差 (Matsuo and Asaoka(1976))



モデル化誤差の一覧

- 安定問題に比べて、変形問題のモデル化誤差が大きい。
- 円弧すべり計算のモデル化誤差は極めて小さい。

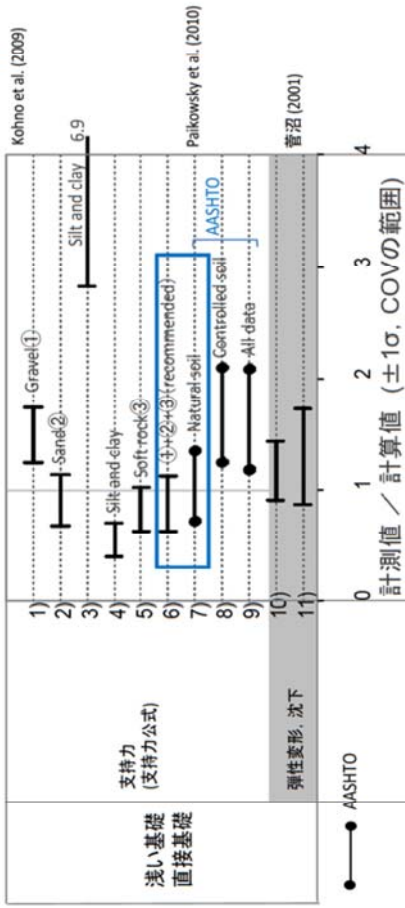
	終局限界(安定)			使用限界(変形)		
	照査方法	bias	COV	照査方法	bias	COV
直接基礎	道示(2002)支持力公式※1	0.85	0.30	建築基準(1988) Boussinesq弾性解 Steinbrenner式※2	1.26	0.35
杭基礎	道示(2002)支持力推定式※1 (tip+side)	0.93	0.33	道示(2002)弾性床上の梁※1 (変位法)	1.22	0.63
斜面安定 ($\phi=0$)	円弧すべり計算	1.0	0.10	—	—	—
土留め壁	—	—	—	仮設構造物指針 (1999) 弾塑性法※3	1.08	0.67

※1: 土木研究所(岡原他(1990), Kohno et al.(2009), 中谷(2009))が実施した統計解析結果
 ※2: 菅原(2001)の宅地盛土の載荷試験における変位計測値と設計計算の誤差解析, ある1地点の結果から計算した値であり参考値とする。
 ※3: 中井他の一連の研究(岩田(2007), Nakai(2007), 加藤(2010))の模型実験と設計計算の誤差解析

モデル化誤差一覧表

直接基礎のモデル化誤差(平板載荷試験vs設計式)

- 支持力公式は、地盤条件、設計定数の設定方法、平板載荷試験の基礎幅等の影響により、biasが大きく変化する。粘性土を除いた、国内推奨値とAASHTOとのNatural soilのモデル化誤差は同程度 (bias=0.85, COV=0.30程度)
- 弾性沈下計算式は、宅地盛土における平板載荷試験データ(菅沼(2001))を解析し、bias=1.2, COV=0.2-0.35程度と想定された。

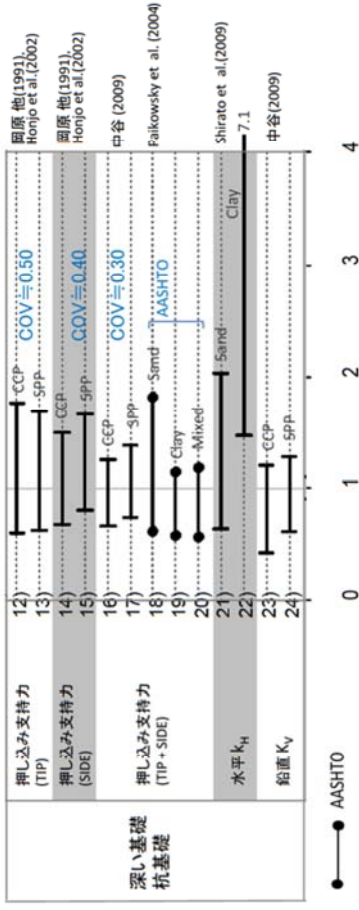


25

モデル化誤差一覧表

基礎のモデル化誤差(鉛直or水平載荷試験vs設計式)

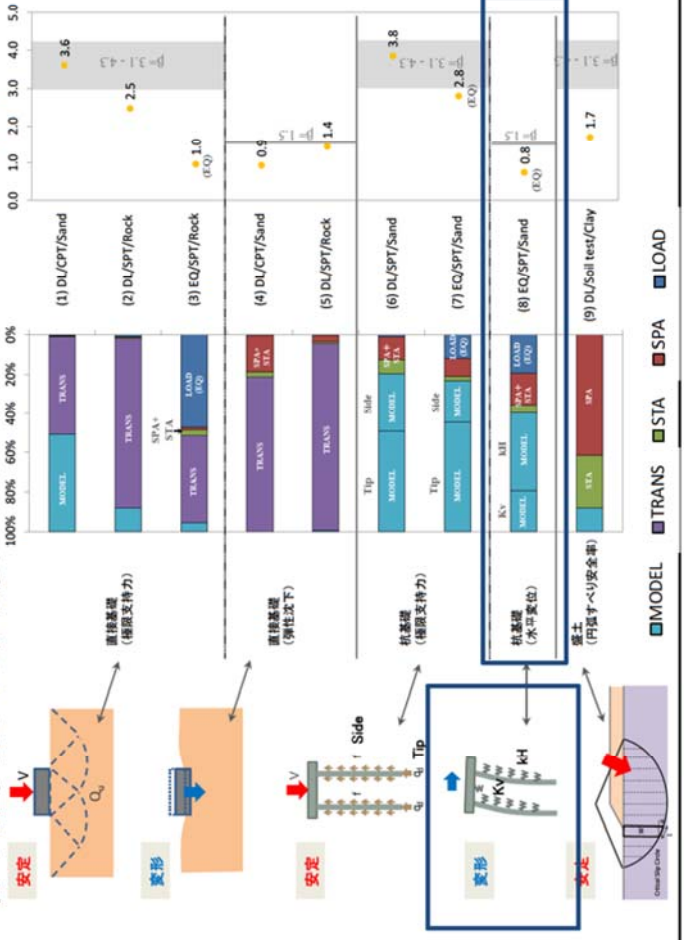
- 押し込み支持力(TIP+SIDE)は、場所打ち杭(CCP), 鋼管杭(SPP)で概ね同程度の誤差を有する。 (bias=0.9-1.0程度, COV=0.32-0.33程度)
- 水平バネ(k_{sp})は、大きな偏差と変動幅を有する。
 k_{sp} : bias=1.22, COV=0.63(Sand), k_{sp} : bias=3.66, COV=0.93(Clays)
- 鉛直バネ(k_v)は、杭種間の差異が大きいが、bias=0.73-0.91, COV=0.31-0.56程度である。



26

信頼性解析結果に見る 地盤構造物設計の課題

各不確実性の寄与度



2015/9/7

27

各不確実性の寄与度のまとめ

- 浅い基礎の終局限界状態(安定性)照査では、N値から $c-\phi$ への変換誤差と、支持力式のモデル化誤差が大きな不確実性要因であり、空間的バラツキの影響や統計的推定誤差は、その影に隠れてしまう。
- 浅い基礎の使用限界状態(変位)照査では、N値から地盤変形係数(E)への変換誤差が支配的、他の要因は、その影に隠れてしまう。
- 杭の鉛直支持力の照査では、N値から直接支持力を推定する公式になっっているため、先端支持力、側面摩擦力ともに、公式のモデル化誤差が支配的である。しかし、空間的バラツキの影響や、統計的推定誤差も、一定の寄与がある。
- 軟弱地盤上の盛土の安定性の問題では、モデル化誤差が小さいため、空間的バラツキの影響と、統計的推定誤差が相対的に大きくなっている。これは、地盤構造物設計の本来の姿であると考えられる。

29

全体のまとめ

- 地盤構造物の設計・解析でネットでなる不確実性は、対象構造物の種類により異なる。
- 空間的バラツキが構造物の性能に与える影響は、一般的に考えられているよりも、小さい。
- モデル化誤差、地盤パラメータの変換誤差が一般に考えられているよりもはるかに重要な不確実性の源である。
- 適切な地盤調査法の適用という、地盤工学の普遍的な問題点に戻る。
- 統計的推定誤差は、地盤解析手法の不確実性が低減すると、相対的に重要な不確実性の源となる。

GRASPIに関連する主要な報文学術誌論文

■理論の開発

- 本城勇介, 大竹雄, 加藤栄和(2012):「地盤パラメータ局所平均の空間的ばらつきと統計的推定誤差の簡易評価理論」, 土木学会論文集C(地盤工学), Vol.68, No.1, pp.41-55
- 大竹雄, 本城勇介(2012):「地盤パラメータ局所平均を用いた空間的ばらつき時の簡易信頼性評価法の検証」, 土木学会論文集C(地盤工学), Vol.68, No.3, pp.475-490.
- 本城勇介, 大竹雄(2012):「地盤パラメータ局所平均の統計的推定誤差評価理論の検証」, 土木学会論文集C(地盤工学), Vol.68, No.3, pp.491-507.
- 大竹雄・本城勇介(2014):「地盤構造物設計におけるモデル化誤差の定量化」, 土木学会論文集C(地盤工学) Vol.70, No.2,170-185
- 大竹雄・本城勇介(2014):「地盤構造物設計における変換誤差の定量化」, 土木学会論文集C(地盤工学), Vol.70, No.2,186-198.
- 本城勇介・大竹雄(2014):「簡易な地盤構造物信頼性解析法の開発と浅い基礎の設計問題への適用」, 土木学会論文集C, Vol.70, No.4, 372-388.

■応用

- 大竹雄, 本城勇介(2012):「応答曲面を用いた実用的な地盤構造物の信頼性設計法:液状化地盤上水路の耐震設計への適用」, 土木学会論文集C(地盤工学), Vol.68, No.1, pp.68-83.
- 大竹雄, 本城勇介, 小池健介(2012):「調査地点を考慮した長大水路の液状化危険度解析」, 地盤工学ジャーナル, Vol.7, No.1, pp.283-293
- 大竹雄, 本城勇介・平松佑一・佐古俊介・中山修一(2014):「震災前後の地盤情報を用いた河川堤防20kmの液状化危険度解析」, 地盤工学ジャーナル, Vol.9, No.2, pp.2, pp.203-21.

31

終了